INSTITUT
DE RECHERCHE
POUR L'ENSEIGNEMENT
DES MATHEMATIQUES

92

Mai 2006

Le calcul algébrique : pistes pour une progressivité des apprentissages de l'école au lycée

Groupe d'enseignants de l'Académie d'Amiens

Département de mathématiques
IUFM d'Amiens

Inspection Pédagogique Régionale
de Mathématiques

Formation Continue

IREM – Université Paris 7

Le calcul algébrique : pistes pour une progressivité des apprentissages de l'école au lycée

Groupe d'enseignants de l'Académie d'Amiens

Département de mathématiques
IUFM d'Amiens

Inspection Pédagogique Régionale
de Mathématiques

Formation Continue

IREM – Université Paris 7

Depuis l'année scolaire 2000-2001, l'IREM de Picardie se voit privé de tout moyen d'existence. Pourtant des équipes perdurent et continuent à travailler, mais éprouvent de grandes difficultés pour publier le résultat de leurs recherches.
En 2001, l'équipe « analyse en termes d'ordre de grandeur » est parvenue à publier sa brochure par l'intermédiaire de l'IREM de Strasbourg.
Le groupe « utilisation de l'outil multimédia dans l'enseignement des mathématiques au collège » poursuit son travail autour du logiciel « 123 maths » qui est hébergé sur le site académique d'Amiens. Ce logiciel est utilisé par de nombreux enseignants à travers toute la France.
En septembre 2003, le département « mathématiques » de l'IUFM, la faculté de mathématiques-informatique de l'UPJV et l'Inspection Pédagogique Régionale de mathématiques ont décidé conjointement de créer un nouveau groupe autour du thème de l'enseignement de l'algèbre. Des professeurs exerçant aux niveaux primaire, secondaire et supérieur, ont accepté d'y participer pendant deux ans, avec pour seule gratification la satisfaction qu'apporte un travail d'équipe mené avec enthousiasme.
Nous remercions donc vivement l'IREM de Paris 7 qui accepte aujourd'hui de publier la brochure fruit de cet investissement.

Sommaire

Ont participé à la rédaction de ce document

Sous la coordination de Brigitte Grugeon-Allys, Maître de Conférences à l'IUFM d'Amiens, Equipe DIDIREM, Université paris 7

École		Collège		Lycée	
Boitrelle	Béatrice	Barré	Gérard	Agnel	Eric
Devauchelle	Eric	Blaise	Jean-Philippe	Choquet	Eric
Mauny	Bénédicte	Cintas	Olivier	Doucement	Maurice
Péchin	Christian	Combes	Marcel	Gibaud	Jean-Michel
		Courtois	Christine	Huet	Michel
		Damagnez	M.-Christine	Klépal	Isabelle
		Diéval	Alain	Masseri	Laurence
		Ducange	Benoît	Pavkovic	Dragan
		Galaup	Philippe	Serris	Claude
		Marchand	Alain	Soleil	René
		J. François	Prouveur	Spagnol	Jean-Pierre

Avec la collaboration de Catherine Roncin et Brigitte Jauffret, Inspectrices Pédagogiques Régionales et de Marylène Brare, Inspectrice de l'Education Nationale

Et Michèle Weindelfeld, Jean-Luc Chabert, de l'Université Jules Verne

Préface

Ce document est le fruit de deux années de réflexion d'un groupe de professeurs et de formateurs de l'académie d'Amiens intervenant dans le premier et le second degré. Ils sont partis d'un constat commun : les compétences des élèves en calcul algébrique ne sont pas satisfaisantes et la remédiation souvent inefficace.

Les difficultés que pose l'enseignement de l'Algèbre sont nombreuses et induisent la tentation de réduire les apprentissages à des « gammes » exclusivement techniques et peu rentables sur le long terme. C'est pourquoi, à chaque niveau, et dans tous les champs de l'activité mathématique, il est important de repérer quand et comment l'algèbre intervient. Un état des lieux a donc été dressé, de l'école à la fin du lycée, pour repérer les besoins puis concevoir et produire quelques exemples d'activités directement exploitables dans les classes.

Conduit par Brigitte GRUGEON-ALLYS, le travail a tout d'abord consisté en un repérage des continuités et des ruptures entre les différents niveaux d'enseignement (école, collège, lycée). Deux universitaires et un professeur de CPGE ont apporté leur vision des compétences d'un élève qui sort du secondaire et des attentes à ce sujet dans le supérieur. Des thèmes de travail spécifiques aux articulations entre l'école et le collège, le collège et le lycée et l'enseignement en cycle terminal ont ensuite été choisis et plus particulièrement étudiés. Les activités construites ont été expérimentées en classe.

Ce document propose des pistes de réflexion assorties d'exemples d'activités portant sur quelques points délicats aussi bien pour les enseignants que pour les élèves : différents statuts d'une égalité, nécessité de modéliser une situation en introduisant des lettres, différents statuts des lettres dans une expression, maîtrise des techniques algébriques, etc.

Nous remercions André PRESSIAT et Brigitte GRUGEON-ALLYS pour leurs conférences toniques qui ont contribué à enrichir la réflexion de chacun.

A. Les programmes

1. Le calcul algébrique dans les nouveaux programmes du collège[1] et de lycée

a) Tableau synoptique au collège

Ces tableaux synoptiques rendent compte de l'introduction progressive des notions au collège dans trois parties sur quatre des programmes de collège

Calcul littéral

Classe de sixième	Classe de cinquième	Classe de quatrième	Classe de troisième
Substitution de valeurs numériques à des lettres dans une formule.	Égalités k(a+b) = ka + kb et k(a-b) = ka . kb. Initiation à la résolution d'équations : test d'une égalité par substitution de valeurs numériques à une ou plusieurs variables.	Développement. Comparaison de deux nombres relatifs. Résolution de problèmes conduisant à une équation du premier degré à une inconnue..	*Puissances.* Factorisation. Identités remarquables. Ordre et multiplication. Problèmes du premier degré ou s'y ramenant. Inéquation du premier degré à une inconnue. Système de deux équations du premier degré à deux inconnues. Équations produits.

Organisation des données et fonctions

Classe de sixième	Classe de cinquième	Classe de quatrième	Classe de troisième
Proportionnalité : image de l'unité, rapport de linéarité, coefficient de proportionnalité Reconnaissance de situations relevant ou non de la proportionnalité. Application d'un taux de pourcentage.	Exemples de fonctions. Proportionnalité : tableau de nombres, quatrième proportionnelle, comparaison de proportions, calcul d'un pourcentage, échelle, mouvement uniforme. Repérage sur une droite graduée et dans le plan. utiliser et produire des expressions littérales :	Proportionnalité : représentations graphiques, quatrième proportionnelle *(« égalité des produits en croix »)*, calculs faisant intervenir des pourcentages ou des indices.	*Notion de fonction.* Fonction linéaire, fonction affine.

Grandeurs et mesures

Classe de sixième	Classe de cinquième	Classe de quatrième	Classe de troisième
Calcul de durées, d'horaires. Périmètre d'un polygone. Longueur d'un cercle. Comparaison de périmètres, d'aires, d'angles. Mesure d'un angle (rapporteur). Aire d'une surface à partir d'un pavage. Aire d'un rectangle, d'un triangle rectangle. Volume d'un parallélépipède rectangle à partir d'un pavage. 1L = 1 dm3. Changements d'unités de longueur, de masse, d'aire, de volume.	Calcul de durées, d'horaires. Périmètre et aire du parallélogramme. Aire du triangle, du disque. Aire d'une surface, d'un solide par décomposition en surfaces d'aires facilement calculables. Aire latérale et volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution.	Volume d'une pyramide, d'un cône de révolution. Vitesse moyenne. Changements d'unités pour des grandeurs quotients courants.	Aire de la sphère, volume de la boule. Effet d'une réduction, d'un agrandissement sur des aires, des volumes. Grandeurs composées, changement d'unités.

[1] Programmes de sixième BO HS n°4 du 9 septembre 2004
Programmes du cycle central BO hors série n° 5 du 25 août 2005
Documents d'accompagnement : Du numérique au calcul littéral

Dans l'introduction des nouveaux programmes de collège (BO HS n°4 du 9 septembre 2004 et hors série n° 5 du 25 août 2005)
Pour le domaine *Nombres et calcul*, il s'agit de :
« - *poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes : mental, posé, instrumenté ;*
- *assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation).* »

Le programme insiste sur plusieurs points :
- donner *une place centrale pour la résolution de problèmes* en particulier pour permettre la découverte de notions nouvelles,
- *prendre en compte les connaissances antérieures des élèves,*
- permettre *une initiation progressive à la démonstration. « Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer. »*

Précisons les objectifs de la sixième à la quatrième à partir de nouveaux programmes :

- En $6^{\text{ième}}$, travailler la signification de formules à partir de divers cadres et contextes, en donnant du sens aux lettres dans la résolution de problèmes. Il s'agit d'amener les élèves à substituer de valeurs numériques à des lettres dans une formule, qui peuvent avoir été produites.

Dès la $5^{\text{ième}}$,
- produire et utiliser des expressions littérales[2]. Il est clairement indiqué que, « *de nombreux thèmes de programme, notamment dans le domaine Grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules). De même dans le domaine numérique, certaines situations se prêtent particulièrement à la production d'expressions littérales, par exemple : recherche du « milieu » de deux nombres, expression du fait qu'un nombre est multiple de 7.* »

- dégager les priorités opératoires usuelles et faire *écrire une expression correspondant à une succession donnée d'opérations*;

« *L'acquisition des priorités opératoires dans un cadre numérique sera réinvesti dans la pratique du calcul algébrique.* ».

- *utiliser les égalités $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$ dans les deux sens ;* Il s'agit de prendre en compte que *«l'intégration des lettres dans ce type d'égalités est une difficulté(...). Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numérique ou géométrique dans lesquelles des identités comme $5(x+4) = 5x+5$ (...) sont travaillées ».*

- *tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on lui attribue des valeurs numériques ;* il s'agit de développer le statut de relation d'équivalence du signe d'égalité et de faire produire des contre-exemples.

- Introduire des lettres *pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut être facilement résolu par un raisonnement arithmétique*. Le statut de variable, de nombre indéterminé a été introduit préalablement.

En $4^{\text{ième}}$,

Poursuivre le calcul littéral :

[2] Dans le domaine *Organisation des données, fonctions* du programme de 5ième

- *Calculer la valeur d'une expression littérale en donnant aux variables des valeurs numériques.* Il est dit dans les commentaires que : « *L'apprentissage du calcul littéral doit être conduit très progressivement à partir de situations qui permettent aux élèves de donner du sens à un type de calcul. (...)*
Le travail proposé s'articule autour de trois axes :
-utilisation d'expressions littérales donnant lieu à des calculs numériques ;
- utilisation du calcul littéral pour la mise en équation et la résolution de problèmes divers ;
- utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général(en particulier en arithmétique) »

- Réduire, développer des expressions : toute sa place est donnée à la reconnaissance de la structure d'une expression « *La transformation d'une expression littérale s'appuie nécessairement sur la reconnaissance de sa structure (somme, produit) et l'identification des termes ou facteurs qui y figurent* »

- Comparer des nombres en mobilisant l'outil de calcul littéral : « *Le fait que « comparer des nombres est équivalent à chercher le signe de leur différence », intéressant notamment dans le calcul littéral, est dégagé. Ces propriétés sont l'occasion de réaliser des démonstrations dans le cadre littéral.* »

- Mettre en équation et résoudre un problème conduisant à une équation du premier degré à une équation. Il est indiqué que « *le choix des problèmes doit faire l'objet d'une attention particulière. Des situations qui aboutissent à une équation du type ax+b=cx+d permettent de mettre en évidence les limites des méthodes de résolution arithmétique ou par essais et ajustements et de faire percevoir l'intérêt de la méthode algébrique* ».

En Troisième,

Le calcul littéral comme outil de démonstration est davantage mis en évidence. Le programme pointe des exemples d'activité : « *La reconnaissance dans une expression d'une forme faisant intervenir une identité remarquable est difficile pour certains élèves. Un travail spécifique doit donc être conduit à ce sujet, dans des situations où le passage d'une expression à une autre est justifié, par exemple dans le cadre de la résolution d'équations ou dans certaines démonstrations* ».

Dans le document d'application *Du numérique au littéral,* le paragraphe 6 est consacré au calcul littéral et à la démonstration. On y rappelle que le cadre numérique est un domaine où le calcul littéral permet de démontrer des propriétés des nombres entiers.
« Le domaine des nombres entiers, familier aux élèves, permet de mettre en évidence dans la seconde moitié du collège la puissance du calcul littéral. En particulier, son utilité pour rendre compte d'une forme (somme ou produit) ou d'une propriété d'un nombre peut être mise en évidence. (...) Dans le cadre numérique, mieux qu'en géométrie, les élèves sont à même de concevoir l'infinité des cas possibles et, après un travail sur la notion d'exemple et de contre-exemple, d'appréhender la nécessité de disposer d'outils de preuve. Ainsi le calcul littéral permet de prouver les résultats sur les nombres entiers, notamment les propriétés de divisibilité comme « La somme de deux multiples d'un nombre est un multiple de ce nombre ». (...)Le calcul littéral est également sollicité pour justifier ou établir des règles.

Pour conclure, il s'agit donc de trouver/créer des activités qui permettent aux élèves de mobiliser le calcul littéral comme un outil performant : par exemple, faire produire des formules, faire prouver des propriétés après une conjecture, amener les élèves à choisir les expressions les mieux adaptées aux problèmes posés.

b) L'usage de l'algèbre au lycée

Plusieurs objectifs sont visés :

En Seconde

- Reconnaître la forme d'une expression algébrique (somme, produit, carré différence de deux carrés)
- Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à f(x) quand f(x) est donnée par une formule.
- Reconnaître différentes écritures d'une même expression et choisir la forme la plus adaptée au travail demandé (forme réduite, factorisée…)
- Modifier une expression : la développer, la réduire, la factoriser suivant l'objectif poursuivi.
- Résoudre une équation ou une inéquation se ramenant au premier degré.
- Utiliser un tableau de signes pour résoudre une inéquation ou déterminer le signe d'une fonction.
- Identifier la variable et son ensemble de définition pour une fonction définie par une courbe, un tableau de données ou une formule.
- Identifier l'enchaînement des fonctions conduisant de x à f(x) quand f est donnée par une formule.

En Première S

Pratiquer le calcul numérique et littéral pour résoudre des problèmes, particulièrement pour :

- étudier des fonctions
- résoudre les équations et inéquations de premier et du second degré
- résoudre les systèmes d'équations.
- factoriser quelques fonctions polynômes.

En Terminale S

Mobiliser l'algèbre au service de l'étude d'autres domaines mathématiques :

- l'étude des fonctions et l'analyse

L'élève doit maîtriser l'algèbre pour déterminer des limites avec quelques astuces de factorisation ou en utilisant la notion de nombre dérivé. On retrouve aussi des techniques pour transformer des écritures, démontrer des égalités, résoudre des équations et des inéquations, calculer des primitives et des intégrales.

Quelques équations qui sont encore très difficiles pour un étudiant : résoudre dans ¡ *:* $(x+1)^3 = 24$, $\sqrt{x^2-2x} = x-3$.

- les nombres complexes (étude algébrique, géométrique et trigonométrique. Quelques applications des nombres complexes),
- la géométrie analytique dans l'espace (« Intersection de deux plans, d'une droite et d'un plan, de trois plans. Discussion géométrique ; discussion algébrique »)

« *On fera clairement apparaître que les problèmes géométriques considérés ici sont aussi l'étude des systèmes d'équations linéaires, que l'on résoudra algébriquement* »

4. Des difficultés des élèves

Nous présentons les réflexions issues des travaux des groupes sur les difficultés des élèves.

a) De l'école au collège

Les constats :
Des ruptures implicites sont pointées comme liées à :

- o différents statuts des parenthèses (séparateur de blocs de calcul jusqu'en 6ème, construction d'expressions numériques en liaison avec la priorité des opérations en cinquième),
- o différents statuts du signe d'« égalité » (« annonce de résultat » non symétrique vers relation d'équivalence (symétrique)),
- o une place privilégiée pour l'écriture globale du résultat d'un calcul et non plus pour les étapes du processus de calcul.

b) Du collège au lycée

La pratique de l'enseignement du calcul algébrique fait apparaître un certain nombre de difficultés ou d'erreurs récurrentes. On peut identifier les difficultés suivantes qui sont liées :

- o à l'évolution du statut du signe « = » : utilisé en début de sixième essentiellement comme annonce de résultat, il intervient ensuite comme relation d'équivalence pour tester des égalités (« égalité vraie pour la(s) solution(s)), pour résoudre des équations ou produire des formules (égalités vraies pour tout nombre),
- o à l'analyse non opératoire d'écritures littérales pour identifier les priorités de calcul et la structure des expressions en jeu,
- o à la mobilisation de règles d'écriture fausses « $2 + x = 2x$ », « $x^2 = 2x$ » « vides de sens » car ne s'appuyant pas sur la dénotation des expressions,
- o à l'usage de différents statuts de la lettre selon les occasions où les élèves les rencontrent (statut de *nombre généralisé* dans la preuve d'une propriété, statut d'*inconnue* dans la résolution d'équations et d'inéquations, statut *de variable* dans l'étude de fonctions, statut d'*indéterminée* dans le développement, la réduction, la factorisation d'expressions),
- o à la prise en compte insuffisante du numérique pour conjecturer des propriétés et de l'algèbre comme outil pertinent de preuve (dépasser le stade de l'expérimentation sur quelques exemples),
- o à un calcul formel ne s'appuyant pas suffisamment sur le raisonnement.

Nous mettons en perspective ces difficultés avec les statuts des lettres en jeu dans les programmes.

5. Nombre généralisé, variable, indéterminée, inconnue à travers les programmes de collège et de lycée

Dès l'introduction du projet de rénovation des programmes de collège, des objectifs apparaissent dans trois des quatre parties des programmes des classes de collège concernées par notre étude et mettent en lumière certains choix :

> *« Chaque partie des programmes des classes du collège s'organise autour des objectifs suivants :*
> ***A - Organisation et gestion de données, fonctions***

• maîtriser différents traitements en rapport avec la proportionnalité ;
• approcher la notion de fonction (exemples des fonctions linéaires et affines) ;
• S'initier à la lecture, à l'utilisation et à la production de représentations, de graphiques et à l'utilisation d'un tableur ;
(...)

B. Nombres et calcul
• acquérir différentes manières d'écrire des nombres (écriture décimale, écriture fractionnaire, radicaux) et les traitements correspondants ;
• Se représenter la droite graduée complète, avec son zéro séparant les valeurs positives et négatives et apprendre à y localiser les nombres rencontrés ;
• poursuivre l'apprentissage du calcul sous toutes ses formes : mental, posé, instrumenté ;
• assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation).

D. Grandeurs et mesures
• Se familiariser avec l'usage des grandeurs les plus courantes (longueurs, angles, aires, volumes, durées) ;
• connaître et utiliser les périmètres, aires et volumes des figures planes et des solides étudiés ;
(...) »

Dans ce préambule apparaissent clairement les notions de fonction, de formule, d'égalité, d'identité, d'équation qui font donc référence aux notions de variable, nombre généralisé, d'indéterminée et d'inconnue correspondant à des problématiques différentes. Cette question était déjà abordée dans un article publié par l'IREM de Besançon en 1994 et reprise par D. Reisz dans le bulletin spécial APMEP n° 445 sur le calcul p 201.

« Pour ce qui est du calcul littéral, on observera notamment que la lettre est tantôt « indéterminée », tantôt « inconnue », tantôt « variable ». Cela est intuitivement évident pour le professeur qui distinguera selon le contexte si dans les expressions telles x^2+7x-2 ou ax^2+bx+c, x est un simple nombre réel qu'on élève au carré, qu'on multiplie par 7 et qu'on soustrait 2, ou si x est indéterminée lorsqu'on effectuera sur ces expressions différents calculs tels que $x^2+7x-2 = (x+\frac{7}{2})^2-\frac{49}{2}-2 = (x+\frac{7}{2})^2-\frac{57}{4}$
Ou si x est une inconnue lorsqu'il sera en face de l'inéquation $x^2+7x-2 \leq ax^2+bx+c$
Ou encore si x est une variable lorsqu'il étudiera la fonction qui à $x \to x^2+7x-2$ ».

- **Formule et fonction – grandeur et variable**

L'approche de la notion de fonction constitue un objectif essentiel du collège en articulation avec le programme du lycée. La réintroduction de la partie «Grandeurs et mesures » y joue un rôle fondamental avec le travail sur les formules. Dans les commentaires du programme de sixième, cette problématique est pointée avec force :

« Certains travaux sur les périmètres conduisent à décrire des situations mettant implicitement en jeu des fonctions, notamment à travers l'utilisation de formules. Des expressions telles que «en fonction de», «est fonction de» peuvent être ainsi utilisées ; par exemple : exprimer le périmètre d'un carré en fonction de la longueur a de son côté. Toute définition de la notion de fonction est exclue ».

Le document d'application « Du numérique au littéral » précise que

« La rencontre de la lettre comme variable est très précoce, dès l'utilisation des formules. La valeur de certaines lettres dépend alors des valeurs attribuées aux autres ».(Cf. problème du carré bordé).

Des nouveaux thèmes apparaissent dans le nouveau programme de cinquième, « *produire une expression littérale, utiliser une expression littérale* » dans le domaine *Organisation des données, fonctions.* Le programme redonne toute sa place aux formules « dans *le domaine Grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules).* »
Dans le projet de programme de troisième, la notion de variable prend toute sa place. Et il est clairement indiqué :

« L'idée de variable est alors dégagée et rapprochée de celle de paramètre en SVT et de variable d'état en Physique. Toute définition générale de la notion de fonction et la notion d'ensemble de définition sont hors programme. La notion d'antécédent est introduite (et le terme antécédent utilisé), par lecture directe dans

un tableau ou sur une représentation graphique. La détermination d'un antécédent à partir de l'expression algébrique d'une fonction n'est exigible que dans le cas des fonctions linéaires ou affines. Le caractère exact des calculs quand la fonction est définie par une ''formule'' et le caractère approché de toute lecture graphique (sauf indication complémentaire) sont évoqués et distingués. La notation $x \to f(x)$ est utilisée. Un travail est conduit sur le rôle différent joué par les parenthèses dans la notation $f(x)$ de l'image de x et dans les expressions algébriques comme par exemple 1,5 (x - 2). »

Cette partie du programme de collège vise à aborder la notion de variable précocement à travers le préconcept de « grandeur variable» en liaison avec la production de formule. Ici, le calcul littéral n'apparaît pas comme une fin en soi mais il est au service de la modélisation à travers la production de formule puis de l'expression algébrique d'une fonction. Ce point de vue est nécessaire pour préparer le travail dans le cadre fonctionnel en seconde et au lycée. La lettre comme variable apparaît préalablement à celui d'inconnue, ce qui confère à la lettre la possibilité de prendre une infinité de valeurs possibles.

L'introduction du projet de programmes met aussi en exergue l'importance de l'initiation progressive à la démonstration :

> « *La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation pour convaincre autrui de la validité d'une réponse, d'une solution ou d'une proposition ou pour comprendre un « phénomène » mathématique a commencé dès l'école primaire et se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration. Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer.* »

La conjecture de propriétés numériques puis leur preuve à travers l'établissement d'identités mobilise l'usage du calcul littéral. Dans cette finalité, les lettres apparaissent comme des nombres généralisés.

- **Equation et inconnue**

Les nouveaux programmes organisent avec soin l'introduction de la notion d'inconnue dont l'usage apparaît explicitement en cinquième « *Une attention toute particulière est apportée à l'introduction d'une lettre pour désigner un nombre inconnu dans des situations où le problème ne peut pas être facilement résolu par un raisonnement arithmétique* ». L'inconnue apparaît après les variables dans les formules. *Les inconnues sont introduites pour tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsque on leur attribue des valeurs numériques.* Une égalité algébrique qui est vraie ou fausse suivant les valeurs attribuées à l'inconnue est appelée équation. Dans ce cas, on mobilise le statut du signe d'égalité comme relation d'équivalence.

- **Indéterminée et calcul littéral**

Que ce soit dans le cas de la production d'une formule, de l'expression algébrique d'une fonction, de la recherche d'une identité, une fois la phase de modélisation terminée, les lettres mises en jeu deviennent des « indéterminées » sur lesquelles on effectue des calculs en dehors du contexte initial en référence au sens interne des expressions.

> « *Pratiquement seules les règles de calcul comptent. Il s'agit d'établir des « identités », des formules » dans lesquelles la substitution de valeurs numériques constitue une phase secondaire, extérieure en quelque sorte au calcul littéral » (APMEP n°445 p 205)*

La lettre ne représente plus des nombres particuliers, mais des nombres quelconques comme dans des identités qui sont universellement vraie.

C'est à travers ces multiples problématiques que l'élève sera amené à construire les différents statuts des lettres dans des situations adaptées.

6. Cadre algébrique et lien avec les autres cadres

a. Lien entre cadre algébrique et les autres cadres

En liaison avec les différents rôles de l'outil algébrique (modélisation via formule, via mise en équation, via fonction, preuve, calcul), le calcul algébrique permet d'étudier des notions mathématiques dans différents cadres :

Cadre fonctionnel

Fonctions linéaires, affines, de référence, Formules algébriques
Image, antécédent, Représentation graphique
Sens de variation, Extremum
Limites, Dérivées, Primitives

Cadre numérique

Nombres entiers, relatifs, décimaux, Rationnels, réels
Propriétés des nombres
Propriétés des opérations
Ordre des nombres
Valeur absolue d'un nombre

Cadre algébrique

Lettres, expressions algébriques, identités, équations, inéquations, systèmes d'équations

Cadre géométrique

Théorème de Pythagore
Théorème de Thalès
Géométrie analytique
Trigonométrie

Cadre des grandeurs

Longueur
Périmètre, aire, volume
Angles

A tous les niveaux au collège comme au lycée, certaines parties du programme exigent de développer les compétences des élèves en calcul algébrique. Mais le niveau technique des élèves en calcul algébrique n'est pas un préalable à la compréhension des notions du programme : un entraînement mécanique aux techniques algébriques par des exercices vides de sens ne prépare pas les élèves aux notions d'analyse ou de géométrie. Au contraire, c'est le support d'un contexte qui fournit des cadres supplémentaires par rapport au cadre algébrique, qui justifie et éclaire en même temps les techniques employées, dont l'usage motivé pourra alors être développé.

On trouve par exemple, dans le document d'accompagnement du programme de Terminale S, dans le chapitre « droites et plans de l'espace », un commentaire qui insiste sur la liaison entre le cadre algébrique et le cadre géométrique :

> « *Un point essentiel est la capacité à traduire en langage algébrique les problèmes géométriques et, inversement, d'interpréter géométriquement les calculs algébriques.* »

Il n'y a rien à gagner à isoler les « gammes » algébriques d'un contexte permettant les changements de cadre. Ainsi le même commentaire indique, à propos d'exercices où les élèves travaillent sur des points, droites, plans donnés par leurs coordonnées ou leurs équations :

> « *Ces exercices aident à renforcer les capacités des élèves dans les calculs algébriques, mais leur intérêt va au-delà de l'aspect mécanique des calculs : les élèves apprennent ainsi à organiser leurs calculs et à les présenter de façon à mettre en évidence la signification géométrique à chaque étape.* »

Ces commentaires s'appliquent à de nombreux moments de l'apprentissage algébrique et n'impliquent pas que le jeu entre cadre algébrique et géométrique.

Qu'est ce que s'approprier les concepts du champ conceptuel de l'algèbre ?

On peut caractériser l'acquisition des notions du champ conceptuel de l'algèbre à partir du schéma suivant :

Utiliser l'outil algébrique pour résoudre des problèmes nécessitant son usage : modélisation *via* formule, *via* mise en équation, *via* fonction, preuve, calcul

Avoir dépassé les obstacles liés à la rupture entre l'arithmétique et l'algébrique (différents statuts du signe d'égalité, démarches arithmétique / algébrique, …)

Mobiliser et associer différentes représentations des nombres, des expressions, des équations, …
en liaison avec d'autres registres de représentations (graphique, langage, figure)

Maîtriser la compétence algébrique

Connaître des définitions, des propriétés :
Equivalence d'expressions,
Equivalence d'équations du premier degré, du second degré
Distributivité de multiplication / addition
Règles de conservation de l'égalité
…..

Connaître des techniques de calcul algébrique en articulant syntaxe, sémantique et technique pour
- développer, réduire, factoriser
- interpréter une expression et choisir l'écriture adaptée en fonction du but visé
- résoudre des équations, des inéquations,
….

Connaître et savoir utiliser les règles d'écriture des expressions numériques, algébriques

Pour conclure, nous explicitons les points à prendre en compte pour un usage raisonné du calcul algébrique dans l'enseignement secondaire du collège au lycée, en indiquant quelques éléments pistes à l'école.

7. Les points à prendre en compte pour un usage raisonné du calcul algébrique dans l'enseignement secondaire de l'école au lycée

Dans les paragraphes suivants, nous illustrons par des situations d'enseignement les points ci-dessous :

a. De l'école au collège

Le calcul algébrique doit prendre appui sur une pratique régulière du calcul réfléchi en cycle 3 et au début du collège : cette étape s'avère indispensable pour travailler le statut du signe d'égalité comme relation d'équivalence, les propriétés des nombres entiers, les diverses écritures d'un nombre. Sans cet appui, il est plus difficile d'installer un calcul algébrique raisonné qui repose sur le choix d'écritures adaptées d'une expression construite en fonction du but visé.

Dans le paragraphe « Le signe d'égalité pour quels usages ? », nous proposons des exemples de situations visant des objectifs complémentaires pour travailler le statut de relation d'équivalence du signe d'égalité dans différents contextes, contextes de calcul, de démonstration ou de résolution d'équation.

b. L'enseignement de l'algèbre du collège au lycée

- Pour donner du sens aux lettres et aux expressions algébriques, il s'agit d'introduire le calcul littéral à partir de problèmes accessibles et significatifs pour les élèves en montrant les limites du numérique pour résoudre les problèmes de généralisation et de preuve, des problèmes de modélisation *via* la production de formules ou la mise en équation.
- Il s'agit ensuite de proposer régulièrement des problèmes « adaptés » pour motiver les emplois de l'outil algébrique : produire des formules, démontrer des propriétés, calculer en recherchant des écritures appropriées, mettre en équation et résoudre.

Dans le paragraphe « Introduire des lettres pour quoi faire ? », nous proposons des problèmes relevant d'emplois variés de l'outil algébrique, à différents niveaux d'enseignement. Une analyse des problèmes et du déroulement des séances en classe est décrite avec soin.

- Le travail technique motivé et raisonné ne doit pas être oublié. Pour ceci, il s'agit de proposer des problèmes pour travailler la technique en liaison avec l'aspect structural des expressions et les buts visés par les tâches.

Dans le paragraphe « Transformer des expressions pour quoi faire ? », nous abordons ce point de vue à partir d'exercices techniques à différents niveaux d'enseignement.

c. L'enseignement de l'algèbre au lycée

- Une première observation, à propos des savoir-faire en matière de techniques algébriques :

A tous les niveaux (Seconde, Première, Terminale), certaines parties du cours sont un **moyen** de développer ces savoir-faire. Le niveau technique des élèves en algèbre **n'est pas un préalable** à la compréhension des concepts du programme. Un entraînement mécanique aux techniques algébriques par des exercices vides de sens ne prépare pas les élèves aux cours d'analyse ou de géométrie. Au contraire, c'est le support d'un contexte qui fournit des **cadres**

supplémentaires par rapport au cadre algébrique, qui justifie et éclaire en même temps les techniques employées, dont l'usage motivé pourra alors être développé.

On trouve par exemple, dans le document d'accompagnement du programme de Terminale S, dans le chapitre « droites et plans de l'espace », le commentaire suivant :

> *« Un point essentiel est la capacité à traduire en langage algébrique les problèmes géométriques et, inversement, d'interpréter géométriquement les calculs algébriques. »*
> *et, plus loin, à propos des exercices où les élèves travaillent sur des points, droites, plans donnés par leurs coordonnées ou leurs équations :*
> *« **Ces exercices aident à renforcer les capacités des élèves dans les calculs algébriques**, mais leur intérêt va au-delà de l'aspect mécanique des calculs : les élèves apprennent ainsi à organiser leurs calculs et à les présenter de façon à mettre en évidence la signification géométrique à chaque étape ».*

Il s'agira donc pour nous de développer l'écriture de scénarios d'activités où les changements de cadre jouent un rôle essentiel, et surtout des activités où le calcul algébrique est nécessaire pour valider des conjectures que les cadres géométriques ou graphiques peuvent seulement faire naître.

- Une deuxième observation, à propos des activités de modélisation d'une situation :

Les formules, équations... qui permettent de modéliser une situation sont la plupart du temps livrées « clés en mains » dans les énoncés. On peut comprendre que, dans un exercice d'évaluation, on tienne à permettre à l'élève de faire la démonstration de ses capacités dans le domaine mathématique, sans être bloqué dès le début par un problème de traduction. Mais on peut faire l'hypothèse que, dans le processus d'apprentissage des techniques algébriques, **l'activité de création de formules** est un instrument efficace pour le développement de la faculté d'analyse des formules, tâche signalée par André Pressiat comme peu pratiquée au collège comme au lycée, et dans des situations très contextualisées.

Nous pourrons donc chercher à écrire des scénarios où le but est d'obtenir une expression algébrique, en analysant les outils à mettre en œuvre pour la construction de la formule. Il serait intéressant de concevoir des situations où une expression, obtenue dans un premier temps, peut être simplifiée par des transformations algébriques.

Une autre hypothèse est que des outils de calcul formel, libérant les élèves de la crainte d'une erreur, permettraient de tester des décisions de transformation sur une formule algébrique. Ils permettraient alors aux élèves d'accumuler de l'expérience sur les bonnes décisions à prendre pour résoudre un problème donné. Mais pour tester cette hypothèse, il faudrait disposer d'un environnement logiciel qui permette d'éviter l'apprentissage d'un langage ou de commandes ésotériques.

Nous abordons ces points de vue dans les paragraphes « Le signe d'égalité pour quels usages ? », « Introduire des lettres pour quoi faire ? », « Transformer des expressions pour quoi faire ? ».

B. Le signe d'égalité, les parenthèses pour quels usages ?

De nombreuses études, dont les résultats des évaluations nationales, mettent en évidence les difficultés des élèves relatives à la notion d'égalité, et ceci, à différents niveaux d'enseignement. Ces difficultés relèvent en partie de la non distinction entre deux statuts du signe d'égalité : celui d'annonce de résultat ou celui de relation d'équivalence.
Dans le paragraphe 1, nous proposons d'une part des situations de test pour repérer ces difficultés dans la transition école / collège, et d'autre part, des pistes pour faire évoluer des conceptions incorrectes du signe d'égalité.

Dès le collège, les élèves vont être amenés à distinguer identité et équation, c'est-à-dire, une égalité vraie pour toutes valeurs des indéterminées en jeu ou une égalité vraie pour une ou des valeurs, les solutions de l'équation. Dans les paragraphes 2 et 3, nous proposons des situations qui visent à éclairer ces distinctions.

1. Le calcul réfléchi comme préalable au calcul algébrique

1.1 Des constats et premières pistes

Lors d'une réunion, nous avons centré notre réflexion sur l'emploi du signe = et des parenthèses. Dans ce but, trois exercices ont été produits et testés sur des élèves de CM1, CM2, 6^e, 5^e et 4^e.

Exercice n°1 :

Bruno achète 3 CD à 12 € l'un et 2 BD à 8 € l'une. Il a 60 € dans son porte-monnaie. Combien lui reste-t-il ?

Exercice n°2 :

Soit le nombre 5.
Ajoute 6 à ce nombre.
Multiplie le résultat par 2.
Quel nombre obtient-on ? Ecris tes calculs.

Exercice n°3 :

Trouver deux nombres tels que leur somme est égale à 49 et leur différence à 3.

$$\begin{cases} \square + \square - 49 \\ \square - \square = 3 \end{cases}$$

Remarques concernant les solutions possibles de l'exercice 1

Pour l'exercice 1, plusieurs procédures sont envisageables :

- Procédure experte attendue en $5^{ème}$: construction d'une expression numérique parenthésée ou non, résultat des étapes du calcul : $60 - (3 \times 12 + 2 \times 8)$ ou $60 - 3 \times 12 - 2 \times 8$

- Procédures attendues en cycle 3 et en $6^{ème}$: présentation des différentes étapes de calcul avec les raisonnement et les écritures numériques associées correctes (par exemple, $3\times12 = 36$; $2\times8 = 16$; $36+16 = 52$; $60-52 = 8$) ou non correctes ($3\times12 = 36 + 2\times8 = 52$ …).
- Procédures attendues en cycle 2 : les différentes étapes de calcul (avec productions d'écritures additives), de dessins, ...

Des procédures d'élèves :

Exercice 1:

$6^{ième}$

Elèves N°1

Bruno achète 3 CD à 12€ l'un et 2 BD à 8€ l'une.
Il a 60€ dans son porte-monnaie.
Combien lui reste-t-il ?

Utilise ce cadre pour tes recherches et ta réponse.

3 × 12 € + 2 × 8 €   60 € − 52 € = 8€
= 36 € + 16 € = 52 €
Bruno lui reste 8 € dans son porte-monnaie.

Élèves N°2

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times\ 3 \\ \hline 36 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 8 \\ \times\ 2 \\ \hline 16 \end{array} \qquad 36+16=52.$$

$$\begin{array}{r} 60 \\ -\ 52 \\ \hline 12 \end{array}$$

Il lui reste 12 €.

Élèves N°3

1) 12 × 3 = 36 €   2) 2 × 8 = 16 €.
36 € de CD et 16 € de BD
3) 36 + 16 = 52 €   4) 60 − 52 = 6 €
il payera 52 € et il lui restera 6 €.

$5^{ième}$.

Elèves N°1

Utilise ce cadre pour te

60 - (3 x 12) + (2 x 8)

60 - (36 + 16)

60 - 52

= 8

il lui reste 8€

Elèves N°2

Utilise ce cadre pour tes recherches et ta réponse.

60 - (3X12 + 2X8)

= 60 - (36 + 16)

= 60 - 52

= 8€

Il lui reste 8€ dans son porte monnaie.

$4^{ième}$.

Elèves N°1

Utilise ce cadre pour tes recherches et ta réponse.

$\boxed{3 \times 12 = 36}$ → CD

$\boxed{2 \times 8 = 16}$ → BD

$\boxed{36 + 16 = 52}$ → CD + BD

$\boxed{52 - 60 = 8}$

Il lui reste 8€

R1 M37

Elèves N°2

Utilise ce cadre pour tes recherches et ta réponse.

60 - (3 x 12) + (2 x 8) = 8€

Il lui reste 8€ dans sont porte monaie

$$\begin{array}{r} 60 \\ -\ 52 \\ \hline 08 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3 \\ \times\ 12 \\ \hline 36 \\ +\ 16 \\ \hline 52 \end{array}$$

Exercice 2 :

6ième.

Elèves N°1

Soit le nombre 5. Ajoute 6 à ce nombre, multiplie le résultat par 2.
Quel nombre obtiens-tu ? Ecris tes calculs.

Utilise ce cadre pour tes recherches et ta réponse.

5
+ 6
× 2

+ 5
6
11
× 2
22.

on obtiens 22.

6 + 5 = 11 × 2 = 22.

R1 M4 (5)

Elèves N°2

Utilise ce cadre pour tes recherches et ta réponse.

1ère étape 5

2ème étape 5 6

56
× 2
112

J'obtiens le nombre 112.

R6

5ième.

Elèves N°1

2 × (5 + 6)
2 × 11
= 22
On a obtenu ~~22~~ 22

Elèves N°2

6 + 5 = 11
11 × 2 = 22
J'obtiens le nombre 22.

4ième.

Elèves N°1

J'ais le nombre 5 si j'ajoute 6 à ce nombre j'obtien 11. Je le multiplie par 2 ce qui fait 22.

$5+6=11 \qquad 11\times2=22$

$(5+6)\cdot\times2=22$

R1

Elèves N°2

$5+6\times2 = (5+6)\times2 = 11\times2 = 22$

J'obtiens 22

R1 (M6)

Les résultats de l'expérimentation :

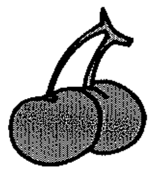
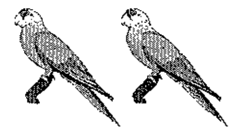
Concernant le signe =, le premier constat qui peut être fait ne concerne pas une mauvaise utilisation du signe, mais plutôt une non utilisation de ce symbole. De nombreuses opérations posées en colonnes font que les élèves n'ont pas à utiliser de signe d'égalité. Lorsqu'il est employé, il correspond à la représentation de "cela fait", la touche EXE de certaines calculatrices (qui autrefois était symbolisée par un signe =), c'est-à-dire, du signe d'égalité « annonce de résultat »

L'utilisation des parenthèses se fait, semble-t-il, de façon non organisée…

Avant de trouver des explications (!), à ces deux difficultés, nous avons recherché dans le vécu des élèves la première apparition (utilisation) d'une part du signe =, d'autre part des parenthèses dans les manuels de l'école primaire.

Le signe =

Il est introduit essentiellement au moment des comparaisons (avec les signes < et >), ceci depuis le CP. On note cependant une utilisation abusive de ce symbole dans le type d'exercice suivant:

 .... 

A la même période, on le trouvera dans les décompositions de nombres (5 = 3 + 2) où le signe d'égalité est symétrique, puis dans l'annonce d'un résultat (3 + 2 = 5 mais aussi plus tard 42 = 8 x 5 reste 2, écriture « incorrecte » présente dans plusieurs manuels !!!) .

Les parenthèses :

Elles permettent, dans leurs premières utilisations, de séparer les différentes opérations d'un enchaînement de calculs. On les retrouve dans les décompositions de nombres :
1 287 = (1 x 1000) + (2 x 100) + (8 x 10) + (7 x 1)

Remarquons qu'il s'agit de parenthèses que le professeur de collège s'efforcera de faire disparaître... pour laisser la place à des parenthèses de priorités opératoires.

Si l'on en reste à ce quelques constats, il existe un grand décalage entre les écrits du cycle 3 et les productions algébriques que l'on peut attendre d'un élève de collège. Il s'agit donc de s'interroger sur la façon de préparer les élèves aux écritures algébriques et ceci dés l'école primaire. Ce que l'on peut résumer en :

Quels acquis de l'école primaire pour aborder l'algèbre au collège ?

Il apparaît indispensable qu'un élève prenne conscience des différents statuts du signe égal, du rôle des parenthèses ... dans des expressions numériques avant de pouvoir les envisager avec des expressions littérales.

En effet, il s'agit, pour un élève de fin de cycle 3, de comprendre qu'un nombre peut avoir plusieurs écritures (4 = 3 + 1 = 1 + 3 = 2 + 2 = 2 × 2 ...) et être à l'aise avec différentes écritures avant de pouvoir concevoir qu'une expression littérale peut, elle aussi, avoir plusieurs écritures différentes : 3n – 2 = 3(n – 1) +1 = 1 + 3 (n – 1) = ...et pouvoir ainsi utiliser les écritures adaptées dans des calculs.

Ce n'est que lorsque l'élève aura acquis une certaine aisance dans la distinction entre les deux statuts du signe = comme annonce de résultat et comme relation d'équivalence à travers l'effectuation d'un calcul (2 + 1 = 3) et la décomposition d'un nombre (3 = 1+2 = 2+1) que l'on pourra aborder plus sereinement la distinction entre k(a+b) = ka + kb et ka+kb=k(a+b).

Il s'agit alors de mettre en place des activités **nécessitant** différentes utilisations du signe =. Nous envisageons plusieurs pistes :

- Utiliser la calculatrice et demander de retranscrire les résultats en ligne nécessite d'utiliser le signe d'égalité comme relation d'équivalence.
- Donner un problème dont les calculs sont déjà faits et demander la rédaction de la solution en ligne.
- Lorsque des calculs ont été posés en colonnes, demander que le résultat de l'opération soit aussi écrit en ligne.
- Développer le calcul réfléchi en s'appuyant sur le calcul mental à partir d'égalités intermédiaires écrites permet d'utiliser les deux fonctions du signe =.

Si les trois premiers points ne demandent que peu de modifications dans les pratiques pédagogiques, nous sommes bien conscients que le dernier suscite encore quelques réticences.

C'est pour cela que nous proposons dans le paragraphe qui suit un développement de ce point particulier : le calcul mental réfléchi comme apprentissage des raisonnements algébriques.

1.2 Le calcul réfléchi comme préalable au calcul algébrique

Rappelons, une fois de plus, que nous considérons qu'il est indispensable que l'élève soit aguerri aux manipulations d'égalités et de parenthèses sur des expressions numériques pour l'envisager sur des expressions littérales. Il s'agit donc de proposer régulièrement des activités qui vont développer ces compétences. Le calcul mental réfléchi est une piste de travail mise en valeur dans les programmes de 2004 en sixième.

L'un de nous a été interrogé un jour par un élève de sixième sur les tables de multiplication : « Pourquoi n'apprend-on les tables que jusqu'à 10 ? »
Faut-il effectivement attendre le travail sur la distributivité pour développer des raisonnements du type : $27 \times 11 = 27 \times 10 + 27 \times 1$? Nous pensons qu'au contraire, travailler assez tôt ce genre de calculs permettra de mieux appréhender des expressions à développer.

De même, il est possible, à l'aide des tables de multiplications de développer des raisonnements qui seront utiles par la suite. Par exemple, écrire que $7 \times 6 = 7 \times 2 \times 3$ ou $7 \times 3 \times 2$, facilite la mémorisation de la table des 6, mais aussi prépare à des raisonnements du type : $3a + 42 = 3a + 7\times3\times2$
$= 3(a + 14)$
Certains élèves de collège considèrent que cette expression ne peut être factorisée, non pas parce qu'ils ne connaissent pas le processus de la factorisation, mais parce qu'ils ne sont pas habitués à des écritures de décomposition.

Pour aller un peu plus loin, voici deux exemples de situations qui peuvent être menées dés le cycle 3.

Objectifs : Mener quotidiennement une séquence de 10 minutes de calcul réfléchi.

Niveaux concernés : fin de cycle 3, sixième

Enoncés

1) *Mehdi veut savoir combien de collégiens ont participé au concours Kangourou 2004 sachant que le nombre de candidats se répartit de la manière suivante : (sous forme de tableau par exemple) 6ème : 108 450 ; 5ème : 70 368 ; 4ème : 39 741 ; 3ème : 27 890. Pour cela, Mehdi pose une addition puis veut vérifier son résultat avec sa calculatrice. Il s'aperçoit alors que la touche « 8 » ne fonctionne plus. Il cherche et trouve une solution pour se passer de cette touche.*

2) *Sachant que 108 employés ont un salaire de 1 300 € par mois, quelle sera la dépense de l'entreprise pour son personnel ?*

Scénario :

En calcul réfléchi, l'élève écrit la procédure qu'il élabore mentalement (sur feuille de type A3). Cela peut permettre:
Un travail sur les unités, dizaines, centaines....,
Au niveau structural, au moins 2 procédures sont possibles.
Élève 1 : 70 368 = 70 367 + 1 ; 108 450 = 107 450 + 1 000 ; 27 890 = 27 790 + 100 ou
Élève 2 : 70 368 = 70 370 - 2 ; 108 450 = 100 450 + 8 000 = 100 450 + 5 000 +3 000 ; 27 890 = 27 900 – 10

Après une recherche pendant un temps court, quelques unes des réponses sont affichées, confrontées afin de mettre en œuvre une argumentation, une justification, et permettre à l'élève de choisir la procédure personnelle qui lui convient « le mieux » et pas forcément la procédure experte.
Il est intéressant d'amener les élèves à limiter le nombre d'essais pour permettre la mise en évidence des propriétés des nombres utilisées. Le professeur vise à amener l'élève à utiliser une procédure experte progressivement en jouant sur les nombres et dans d'autres situations.

Pour consolider les techniques, de calcul, des exercices d'entraînement du même type seront réalisés sur un cahier pour une trace écrite de référence. Prévoir un travail d'évaluation qui sera semblable. Ce peut être des exercices "Trouver l'intrus" en expliquant ses critères : 19 + 17 ; 19 + 20 -3 ; 20 + 20 - 4 ; 19 + 10 + 7 ; 19 + 23 – 5. Ici 2 critères conduisent à un débat dans la classe : nombre de termes ou nombres égaux.

Le document d'accompagnement « Calcul mental » développe ce point de vue et donne des pistes d'activités (http://eduscol.education.fr/D0048/calcul_mental.pdf). Il en est de même du livre « VRAI, FAUX, on en débat ! », de J. Douaire et al, publié par l'INRP.

2. Démontrer des égalités

Niveaux concernés : seconde, éventuellement cycle central et fin de collège en adaptant les expressions

L'objectif principal des exercices suivants est de mettre en place des méthodes pour démontrer des égalités entre expressions algébriques.

Il s'agit de rendre opérationnelles les méthodes suivantes :

- Transformer l'un des membres pour obtenir l'autre membre (Ex.1, questions 2 et 4)
- Transformer les deux membres pour obtenir une expression identique (Ex.1, question e, et éventuellement Ex.2, question 1.d.)
- Prouver que la différence des deux membres vaut 0 (Ex.2, question 2 et éventuellement question 1.d)

En fin de séance, un bilan sera réalisé avec les élèves.

Exercice 1

On désigne par x un nombre réel. Parmi les égalités ci-dessous, lesquelles sont :

- vraies pour certaines valeurs bien choisies de x dans $\mathbb{R}$?
- vraies pour toutes les valeurs possibles de x dans $\mathbb{R}$?

a) $x^2 = x$

b) $(x + 3)^2 + x^2 = 2x^2 + 6x + 9$

c) $(x - 1)(x - 2)(x - 4) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$

d) $2x^2 - 8x + 15 = 2(x - 2)^2 + 7$

e) $(x + 5)(x - 3) = (x + 1)^2 - 16$

Justifiez vos réponses.

La recherche d'exemples et de contre-exemples permet de déterminer le statut des égalités. On ne recherche pas ici de réponse exhaustive, mais, lorsqu'une égalité n'est « vraie que pour des valeurs bien choisies de x dans $\mathbb{R}$ », il est naturel de se demander précisément lesquelles. On peut faire remarquer aux élèves que **poser cette question, c'est demander de résoudre une équation**. C'est la question qui fait l'équation...

Pour démontrer dans $\mathbb{R}$ une égalité entre expressions algébriques, une méthode tout à fait rigoureuse consiste à démontrer que $\mathbb{R}$ est l'ensemble des solutions de l'équation associée. Il est d'ailleurs fréquent de voir un élève partir de l'égalité à justifier et construire une suite d'égalités (plus ou moins...) équivalentes. Cette méthode est généralement rejetée, alors que correctement rédigée elle est logiquement valide. Les difficultés de rédaction justifient à priori d'en éviter l'utilisation, mais il faut expliciter ce refus aux élèves.

Exercice 2

1. Vérifier les égalités suivantes :

a) $1 + 3 + 3^2 = \dfrac{3^3 - 1}{3 - 1}$

b) $$1+8+8^2=\frac{8^3-1}{8-1}$$

c) $$1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^3-1}{\frac{2}{3}-1}$$

d) $$1+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\frac{\left(\sqrt{2}\right)^3-1}{\sqrt{2}-1}$$

2. a) Peut-on écrire des égalités, construites sur le même modèle, pour d'autres nombres ?

b) Peut-on généraliser à tous les nombres réels ?

Les démonstrations d'égalités entre expressions numériques sont l'occasion de travailler les notions de valeurs exactes et de valeurs approchées. La question 1.d., peut-être un peu technique en Seconde, semble cependant importante pour souligner la signification de la phrase « x est un réel ». Il est d'ailleurs possible de choisir entre deux méthodes : le calcul de la différence des deux membres évite, si on le souhaite, ou si l'on veut fournir une clé pour la question 2, le recours à la technique de multiplication par la quantité conjuguée du dénominateur (que l'on emploie si on veut transformer séparément les deux membres).

La dernière question est présentée sous une forme « ouverte ». On attend ici des élèves :

- qu'ils utilisent une lettre pour désigner un réel quelconque
- qu'ils construisent une proposition mathématique (avec une quantification et le domaine de validité)
- qu'ils démontrent que cette proposition est vraie

Dans cette séance, à travers le travail sur les méthodes, le professeur va mettre l'accent sur la compréhension et la formulation des énoncés. Les quantificateurs sont ici indispensables car ce sont eux qui vont donner le sens au travail réalisé. A cet égard, un travail oral de formulation en conclusion de l'exercice 1 est tout indiqué (au sujet de l'acquisition transversale de compétences en logique, on pourra se reporter au document d'accompagnement du programme de spécialité de la série L).

3. Égalité et Équation

Ce travail complète les activités du paragraphe précédent. Le scénario est conçu pour une ou plusieurs séances de module en classe de Seconde (pré requis : généralités sur les fonctions, résolution graphique d'équations).

L'objectif de l'activité est la mise en parallèle des tâches suivantes :

- x étant une variable réelle, démontrer qu'une égalité est vraie pour toutes les valeurs de x
- x étant une inconnue réelle, résoudre une équation.

D'autre part ces exercices permettront de souligner l'intérêt des factorisations dans la résolution des équations.

Exercice A

1. Démontrer que l'égalité $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$ est vraie pour tout réel x.
2. En déduire la résolution de l'équation $2x^2 - 5x - 3 = 0$.

La question 1 est l'occasion faire la liste des différentes méthodes permettant de justifier une égalité. Celle consistant à choisir le second membre de l'égalité pour l'identifier au premier membre est ici la seule à la portée des élèves.
La question 2 est une résolution d'équation après une transformation d'écriture naturellement induite par l'égalité précédemment justifiée.

Exercice B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

1. A l'aide d'une calculatrice graphique, tracer la courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle [-5 ; 5].
2. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
3. D'après la question 2, deux de ces expressions factorisées peuvent être égales à $f(x)$. Lesquelles, et pourquoi ?

a. $(x + 1)(x - 3)$

b. $(x - 1)(x + 3)$

c. $(x + 1)(x + 3)$

d. $(-x + 1)(x + 3)$

4. Démontrez qu'une des expressions que vous avez désignées est effectivement une forme factorisée de $f(x)$.

On est ici dans l'esprit des commentaires du programme de Seconde (Mathématiques, classe de Seconde, document d'accompagnement des programmes, p.16) :

« *Un autre exemple est l'utilisation de la représentation graphique de la fonction* $x \mapsto x^2 + 3x - 10$ *pour conjecturer que 2, par exemple, est une solution de l'équation* $x^2 + 3x - 10 = 0$ *; le calcul permet de vérifier facilement que c'est bien le cas ; il reste à anticiper un peu sur la factorisation et à vérifier que* $(x - 2)(x + 5)$ *est bien une écriture possible pour l'expression* $x^2 + 3x - 10$ *pour aboutir à la résolution de l'équation.* »

Toutefois, le scénario proposé par ce commentaire appelle quelques réserves : pourquoi ne « voir » sur le graphique que la solution 2 et pas -5 ? D'autre part, « anticiper *un peu* sur la factorisation » n'est peut-être pas si évident pour des élèves de Seconde et mérite une activité appropriée.

Nous proposons donc plutôt la mise en place d'une conjecture concernant la factorisation d'une expression, après résolution d'une équation dans le cadre graphique.

La seule considération des racines ne permet pas d'éliminer toutes les factorisations proposées : il en reste deux. On peut penser que certains élèves verront ainsi plus facilement la nécessité d'une démonstration : seule une vérification dans le cadre algébrique permet de prouver qu'une des propositions est correcte.

Exercice C

1. Pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$, démontrer que $\dfrac{9}{x-1} - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{8x+10}{x^2-1}$.

2.	Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\dfrac{9}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}=0$.
3.	Faire une vérification graphique à l'aide de la calculatrice.

Dans la question 1, la vérification de l'égalité se fera en identifiant, après transformation, le premier membre au second. Pour cette question s'ajoute la difficulté d'un calcul fractionnaire pas toujours bien maîtrisé par les élèves : on peut espérer que la connaissance du résultat permettra à un certain nombre d'élèves de revenir efficacement sur leur calcul en cas d'erreur.
La question 2 est encore une résolution d'équation après une transformation d'écriture naturellement induite par l'égalité précédemment justifiée. Une vérification dans le cadre graphique est ensuite proposée.

Exercice D

1. Démontrer que l'égalité $(x-3)(x^2-x-2)=(x-2)(x^2-2x-3)$ est vraie pour tout réel x.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $(x-2)(x^2-2x-3)=0$.

La question 1 est une nouvelle vérification d'égalité mais cette fois la méthode adaptée consiste à vérifier que les deux expressions algébriques sont identiques à une même troisième ou bien que leur différence est nulle pour tout x.
La question 2 est une résolution induite partiellement par l'égalité précédemment justifiée : une importante prise d'initiative est nécessaire de la part des élèves.
Ici, l'emploi du cadre graphique n'est pas pertinent si l'on veut réellement exploiter la question 1. Le but de l'exercice est la résolution de l'équation. Si une lecture graphique conduit à conjecturer la valeur des solutions, il n'y a pas d'intérêt à en déduire une factorisation : il suffit de vérifier directement si les solutions conjecturées conviennent.
Par contre, tout en conservant l'aspect « ouvert » du problème, le professeur peut prévoir des aides ou des relances qu'il utilisera si nécessaire.
Voici par exemple une série de trois aides :

A1. Une solution est « évidente », laquelle ?
A2. Utiliser la question 1 permet de déterminer une autre solution, laquelle ?
A3. Quel type de factorisation peut-on conjecturer maintenant pour l'expression x^2-2x-3 ?

Travail à la maison : exercice E

1. Montrer que pour tout réel x, $x^3-x^2-4x+4=(x-1)(x^2-4)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3-x^2-4x+4=0$

Pris séparément, les exercices proposés ici sont très classiques. Dans cette séance le rôle du professeur consiste à pointer ce qui relève d'habitude de l'implicite : le statut de la lettre. Au sein d'un même exercice, selon la question considérée, x est une inconnue, une variable ou une indéterminée.
On remarquera aussi les statuts différents de la factorisation : outil pour résoudre une équation, dans les exercices A, C, D et E, elle est le but à atteindre dans l'exercice B.
L'emploi des calculatrices pour passer dans le cadre graphique est recommandé mais il faut alors le manier avec précaution ; selon le moment choisi pour leur emploi, les tâches dévolues aux élèves changent radicalement.

C. Introduire des lettres pour quoi faire ?

L'outil algébrique permet de résoudre des problèmes du champ algébrique de différents types :

- Problèmes pré algébriques : Ces problèmes permettent de montrer l'insuffisance du numérique et la nécessité d'introduire les lettres pour généraliser. Nous illustrons cet enjeu d'enseignement de la sixième à la quatrième dans le paragraphe 1 « Des problèmes pré algébriques : la généralisation en question ».

- Problèmes pour modéliser : L'outil algébrique est un outil puissant pour modéliser des systèmes (dans le cadre des grandeurs, dans le cadre géométrique) *via* la production de formules. C'est l'occasion d'aborder une notion essentielle en mathématique, la notion de fonction. Nous illustrons cet objectif d'enseignement dans le paragraphe 2 « Des problèmes pour modéliser : des formules aux fonctions ».

- Problèmes pour prouver, pour démontrer : L'outil algébrique permet contrairement au numérique, de prouver des propriétés numériques, géométriques, de démontrer des propriétés algébriques. Ici, c'est la notion d'identité qui est mise en jeu. Nous illustrons cet objectif d'enseignement dans le paragraphe 3 « Des problèmes pour prouver, pour démontrer : des propriétés numériques, algébriques, géométriques ».

- Problèmes pour mettre en équation : En quatrième, il s'agit d'amener les élèves à prendre conscience de l'insuffisance de la démarche arithmétique pour résoudre des problèmes. Quels sont les problèmes qui nécessitent une mise en équation pour leur résolution ? Nous illustrons cette question dans le paragraphe 4 « Des problèmes pour mettre en équation : quels problèmes pertinents ? »

1. Des problèmes pré algébriques : la généralisation en question (sixième – . quatrième)

1.1 Un exemple de problème :

Présentation du problème :

Le problème consiste à établir une formule qui permet de calculer le nombre de carrés d'une figure construite sur le modèle ci-dessous, quel que soit le numéro de la figure.

Voici une suite de figures géométriques :

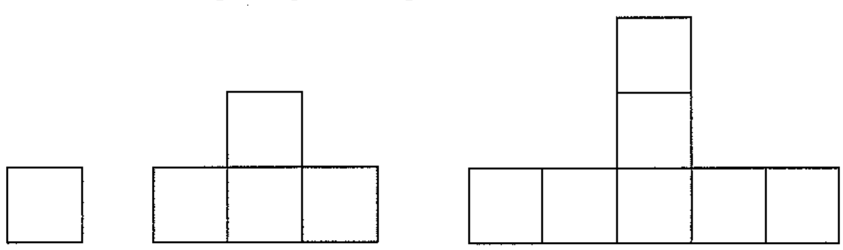


fig. 1 fig. 2 fig. 3

Niveaux concernés *:* sixième à quatrième

Objectifs

Amener les élèves à produire et à exploiter des formules qui expriment une procédure de calcul.
Montrer les limites du numérique dans la résolution d'un problème en terme de coût.
Montrer que différentes expressions liées à un programme de calcul permettent d'obtenir le même résultat

Potentialités de cette situation

- Amener un travail sur l'articulation entre le langage naturel et le langage algébrique : l'écriture des formules peut s'appuyer sur la description d'une méthode de calcul dans le langage naturel préalable à l'écriture d'une formule.
- Travailler la non unicité du choix des lettres et la non unicité des formules produites pour un même choix de lettre. On pourra toutefois montrer aux élèves que même si des formules semblent différentes, elles peuvent être équivalentes (lorsqu'on remplace dans chacune d'elles les lettres par un même nombre, on obtient toujours le même résultat).
- Travailler sur les règles de syntaxe des expressions algébriques, aussi bien au niveau de la formation des écritures algébriques (sixième, cinquième) qu'au niveau de leur traitement (quatrième).

Scénario envisageable en classe de sixième ou de cinquième

Phase 1 : appropriation du problème par les élèves (présentation et travail individuel pour réaliser des figures correspondant au modèle)

Phase 2 : recherche d'une méthode de calcul dans le cas numérique (travail individuel ou de groupe), formulation et validation (en classe entière)

Phase 3 : formulation en français et validation des différentes procédures de calcul (en groupe puis en en classe entière)

Phase 4 : recherche de la stratégie la plus économique avec une formulation en français (travail de groupe puis mise en commun) puis recherche d'une écriture économique en passant d'une formulation en français à une formule. Cette mise en commun met en évidence les points suivants :
- une lettre remplace n'importe quelle valeur numérique ;
- une même méthode de calcul peut être formulée différemment ;
- les formules écrites, tout en étant différentes, sont équivalentes (ceci est montré en substituant un même nombre dans les différentes formules).

Phase 5 : institutionnalisation de la recherche de formules générales pour calculer le nombre de carrés d'une figure donnée

Etape de réinvestissement pour un autre problème

Fiche élève

Voici une suite de figures géométriques :

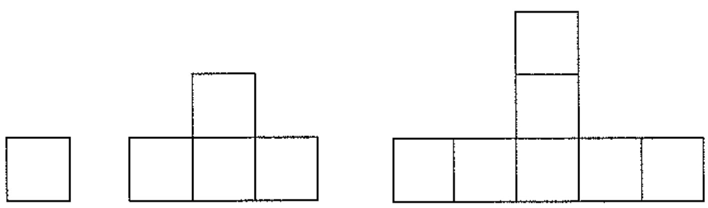


fig. 1 fig. 2 fig. 3

1)Dessine les deux figures suivantes de cette suite et détermine le nombre de carrés qui les compose.
2)Quel sera le nombre de carrés à la $10^{\text{ème}}$ figure ?
3)Quel sera le nombre de carrés à la $100^{\text{ème}}$ figure ?
4)Quel sera le nombre de carrés à la $634^{\text{ème}}$ figure ?

Commentaires sur des mises en oeuvre et exemples de productions d'élèves

Phase de lancement	**- Distribution de l'activité.** **- Lecture du document.** **- Consigne : « vous avez 30 minutes pour répondre aux questions de cette activité ».** *Remarque : le fait de donner une limite de temps permet de mettre en avant l'apport d'une solution algébrique par rapport à une solution numérique.*
Phase de recherche	**- Recherche des élèves en groupe (*afin qu'il y ait un débat plus riche sur les stratégies à utiliser*)** **- Le professeur n'intervient que très peu lors de la recherche et seulement pour valider les réponses intermédiaires (questions 1 et 2) et motiver les groupes.** **- Lorsque tous les groupes ont répondu à la question 1, le professeur envoie deux élèves au tableau pour dessiner les figures de cette question.** **La recherche continue**
Phase de mise en commun	**- Demander aux élèves une explication sur la stratégie qu'ils ont utilisée pour répondre aux questions 3 et 4.** **-Noter au tableau ces stratégies sous la forme d'un programme de calcul en français.** *Différentes stratégies envisagées* *1) Stratégie basée sur la relation qu'il existe entre une figure et sa précédente :* *Pour trouver le nombre de carrés d'une figure, on ajoute 3 au nombre de carrés de la figure précédente.* *En partant du nombre de carrés de la figure 1, on ajoute le nombre 3 une fois de moins que le numéro de la figure dont on cherche le nombre de carrés.* ***Programme de calcul** : ajouter au nombre de carrés de la figure 1 le produit de 3 par le numéro de la figure moins 1.* *2) Stratégie basée sur la structure commune des figures qui permet le comptage des carrés.* *a) Le nombre de carrés qu'il y a à gauche, à droite et au dessus du carré central est le même. Ce nombre est égal au numéro de la figure moins un.* *Le nombre de carrés d'une figure est obtenu en multipliant par 3 son numéro moins 1 et en ajoutant à ce résultat 1 (c'est le carré central).* ***Programme de calcul** : multiplier le numéro de la figure moins 1 par 3 et ajouter 1.* *b) Le nombre de carrés à gauche, à droite et au dessus est le même (carré central inclus). Ce nombre correspond au numéro de la figure.* *Le nombre de carrés d'une figure est obtenu en multipliant par 3 son numéro et en soustrayant à ce résultat 2 (sinon le carré central serait compté deux fois de trop)* ***Programme de calcul** : multiplier le numéro de la figure par 3 et soustraire 2.* **- Valider les différents programmes de calcul.** *La validation peut se faire à l'aide des figures dessinées au tableau.* **- Produire par un dialogue les différentes expressions algébriques qui découlent de leurs programmes de calcul. Introduire la lettre pour simplifier l'écriture. Ces expressions sont écrites au tableau.** *Expressions écrites au tableau* *En notant n, le numéro d'une figure, on a les expressions suivantes :* $3(n-1)+1$ *ou* $1+3(n-1)$ *(expressions obtenues à partir des stratégies 1 et 2a après simplification des écritures)* $3n-2$ *(expression obtenue à partir de la stratégie 2b après simplification des écritures)* **- Faire fonctionner ces expressions pour trouver le nombre de carrés de la 100ème figure et de la 634ème figure.**

	A écrire au tableau.
Phase d'institutionnalisation	**- Faire noter dans le cahier :** *On a trouvé différentes expressions littérales qui permettent de répondre aux questions de l'activité :* *Le nombre de carrés de la figure numéro n est donné par l'une des expressions littérales suivantes : $3n-2$ ou $3(n-1)+1$* *Le nombre de carrés de la 634ème figure est :* *$3\times 634-2=1900$ (utilisation de la première expression)* *$3\times(634-1)+1\ =1900$ (utilisation de la deuxième expression)*
Phase de réinvestissement	- Comparer les deux expressions en faisant calculer le nombre de carrés pour divers numéros de figure (calcul mental – calcul écrit)

Les variantes

Remplacer la question 2 par un tableau à compléter.

Complète le tableau ci-dessous :

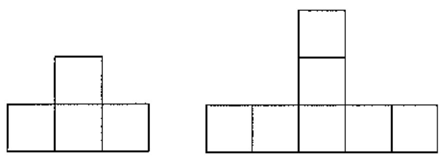
Numéro de la figure	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de carrés formant la figure	1	4								

Cette variante peut conduire les élèves à la production d'un programme de calcul à partir du nombre de carrés de la figure 10 : pour calculer le nombre de carrés de la figure on a l'expression $28+3(n-10)$.

Attention, la présence du tableau peut amener les élèves à penser que c'est une situation de proportionnalité. Pour beaucoup d'élèves, un tableau est toujours un tableau de proportionnalité !!!

Supprimer les numéros des figures, supprimer la première figure, et changer la consigne.

Voici une suite de figures géométriques :



Consigne : En 15 minutes, trouver le nombre de carrés du plus grand nombre de figures de cette suite.

Comparer les expressions en terme de rapidité de calcul

Poser des questions du type :

Quelle est selon vous, l'expression la plus rapide pour calculer le nombre de carrés de la figure numéro 100 – 1000 – 10000 ?

Quelle est selon vous, la plus rapide pour calculer le nombre de carrés de la figure numéro 100000001?

Quelle est selon vous, la plus rapide pour calculer le nombre de carrés de la figure numéro .....?

1.2 Des problèmes de même type

Programmes de calculs

Aboutissant soit à un résultat constant soit un multiple du nombre choisi au départ soit au nombre suivant ou précédent.
Le but est de provoquer la rupture arithmétique pour conduire l'élève vers l'algèbre.
Le choix de ce type de problème se justifie par la facilité à conjecturer.

Exemple élève 1 Choisis un nombre entier Multiplie le par son suivant Et soustrait le carré de ton nombre choisi au départ	Exemple élève 2 Choisis un nombre Multiplie le par 2 et ajoute 3 Multiplie le tous par 5 et enlève 10 fois le nombre de départ	Exemple élève 3 Choisis un nombre entier différent de 7 Ajoute 1 Met le tout au carré Enlève au résultat le produit du nombre choisi et de son suivant

Scénario possible

Phase 1 : appropriation du problème par les élèves
Phase 2 : calcul numérique et conjecture
Phase 3 : mise en commun et questionnement : « démontrer le résultat pour tous les nombres »
Phase 4 : recherche d'un stratégie par les élèves
Phase 5 : synthèse et institutionnalisation

2. Des problèmes pour modéliser : des formules aux fonctions

Dès la classe de Troisième, l'étude des fonctions donne lieu à un travail à partir de situations géométriques ou de problèmes « concrets ». Cependant il ne s'agit bien souvent que d'un prétexte et les exercices gratuits sur les techniques, hors de tout contexte, semblent plus abordables pour les élèves...

La modélisation est une phase essentielle de l'activité du mathématicien. Dans la scolarité, l'utilisation de l'outil algébrique en est la première étape durant laquelle la compétence algébrique se construit en même temps qu'elle s'utilise.

A propos de la notion de fonction, le document d'accompagnement des programmes de Seconde précise (brochure du CNDP, p.14) :

« *Pour aborder la notion de fonction..., le programme propose de s'appuyer sur quelques situations simples. On privilégiera celles pour lesquelles l'explicitation du lien entre deux grandeurs permet de répondre à une question : ainsi on peut trouver de nombreux exemples de situations géométriques faisant intervenir comme variable une longueur et comme deuxième grandeur une longueur ou une aire ; la question à traiter est alors souvent un problème de maximum, de minimum ou même de recherche d'une valeur particulière.* »

On trouve effectivement dans les manuels de nombreuses activités du type précédent. Il est frappant de constater que, dans la grande majorité des cas, l'existence d'un « lien à expliciter » entre deux grandeurs est considérée comme allant de soi, et que le problème est présenté avec une « algébrisation à priori » plus ou moins partielle : cela peut aller du choix de la lettre « x » pour désigner une des grandeurs, jusqu'à la donnée du lien fonctionnel sous forme d'expression algébrique à vérifier.
Pourtant, on peut se rendre compte que ce lien n'est pas une évidence, même s'il est induit par l'énoncé. Les stratégies des élèves sont souvent d'une efficacité non négligeable face au problème posé. **La création d'une expression algébrique doit être motivée par un besoin nouveau,** qui est, bien souvent, la recherche d'une valeur exacte et qui correspond ainsi à un travail sur les nombres

Les exemples qui suivent montrent comment amener les élèves à ressentir la nécessité d'une relation fonctionnelle entre deux variables.

On dispose d'une feuille de papier carrée de 10 cm de côté. Aux quatre coins, on découpe quatre carrés de même taille. On plie ensuite la forme obtenue pour construire une boîte sans couvercle. Le volume intérieur de la boîte varie-t-il suivant la taille des découpes ?

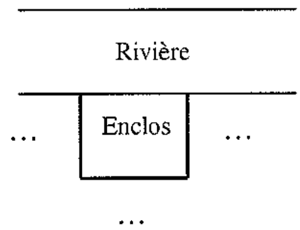
Ce problème a été posé en classe de Seconde lors d'une séance d'une heure en classe entière. Il était vu par le professeur comme l'occasion de réinvestir le cours sur les notions de fonction, sens de variation, maximum et minimum, et d'introduire l'usage des calculatrices graphiques, (ce qui n'avait pas été possible auparavant car il fallait attendre qu'un nombre suffisant d'élèves dispose d'une calculatrice). Comme le cadre numérique suffit pour répondre à la question posée et permet aux élèves de « rentrer » dans la situation sans trop de problèmes, une relance était prévue pour demander la recherche d'un découpage « optimal ».

Mais nous allons voir que le cadre numérique est resté trop prégnant pour que les élèves introduisent spontanément des outils algébriques.
Dans un premier temps, l'exploration de la situation par les élèves a compris la réalisation concrète d'une boîte particulière pour certains, et des calculs de volumes qui prouvent effectivement que le volume varie avec la taille des découpes.

La relance a ensuite provoqué une accumulation d'exemples numériques : pour faciliter les échanges, la présentation sous forme de tableau s'est imposée et a provoqué l'apparition de lettres. **Mais il est clair que celles-ci avaient une simple fonction de dénomination.** Le côté des découpes fut massivement noté « x », et son statut de variable semble-t-il reconnu, au moins implicitement. Mais on trouvait ensuite, par exemple, « L » pour le côté du carré de base de la boîte, puis « V » pour son volume, sans que soient explicités des liens entre x, L, et V.
Les calculs ont suffi à certains élèves pour conjecturer l'existence d'un volume maximal, et l'un d'eux fut assez efficace pour obtenir un encadrement à 10^{-2} près de la valeur de x qui permet de l'atteindre.
D'autres élèves ont eu besoin de visualiser les résultats et ont réalisé une représentation graphique. Les différentes allures des graphiques obtenus, dues à des choix différents au niveau du pas de x, ont provoqué des discussions.
Ce fut le premier moment où les élèves, attribuant une valeur subjective aux calculs effectués, sont devenus disponibles pour un « arbitrage ». Mais c'est l'idée de « puissance de calcul » qui s'est imposée : il était clair pour les élèves que, plus les calculs sont réalisés avec un pas petit, plus les conclusions sont fiables.
Le professeur a proposé l'emploi des fonctions graphiques des calculatrices. **La nécessité d'un lien algébrique entre V et x s'est alors imposée**, comme seul moyen de communiquer avec la machine.
Une fois l'outil utilisé au mieux de ses capacités, le professeur a proposé de tester la valeur numérique de x (5/3) qu'il sait être celle qui va fournir le maximum exact. Pour ne pas laisser croire aux élèves que la calculatrice fournit une réponse exacte au problème posé, il a signalé qu'il avait déduit cette valeur de l'expression algébrique, et que ceci serait l'objet d'un apprentissage dans les classes ultérieures.

L'écriture de la formule algébrique a permis ici de donner l'accès à un outil supplémentaire : elle s'est présentée comme la traduction d'une situation qui avait été explorée et que les élèves pouvaient par ailleurs exprimer par des mots.
Le choix d'une situation où la fonction qui intervient est un polynôme du troisième degré ne permet pas un traitement algébrique complet du problème en Seconde mais a deux avantages : on évite le genre de problème où on justifie laborieusement une solution intuitivement évidente, et la forme de l'arc de courbe obtenu provoque des débats qui ne se rencontrent guère avec un arc de parabole.

On veut créer un enclos rectangulaire le long d'une rivière, on dispose de 1000 m de grillage. On s'intéresse à l'aire de l'enclos.



Il s'agit en Seconde d'une situation classique d'étude d'une aire à périmètre constant. Pour aborder ce genre de problème avec une classe, on rencontre un type de scénario non moins classique, exploité aussi en Troisième dans les exercices où l'on utilise des fonctions affines :

On distribue la fiche élève suivante, en prévoyant des temps de travail individuel des élèves, puis des mises en commun et des relances du professeur si nécessaire :

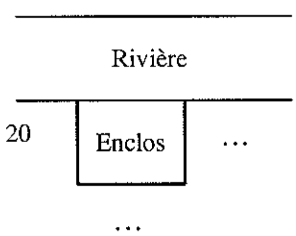
Fiche élève

On crée un enclos rectangulaire situé au bord d'une rivière avec 1000 m de grillage, que l'on utilise totalement.

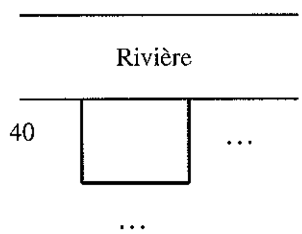
Première partie

Compléter les pointillés sur les figures suivantes sachant que les dessins ne sont pas à l'échelle. Exprimer l'aire pour chaque cas de figure.

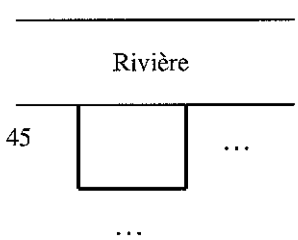
Première figure :



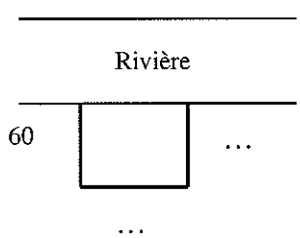
Deuxième figure :



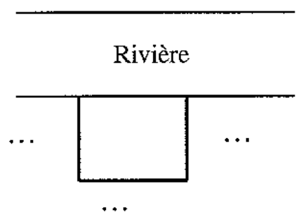
Troisième figure :



Quatrième figure :



Deuxième partie : cas général



Exprimer les dimensions du terrain à clôturer pour une clôture de 1000 m. Exprimer l'aire du terrain.

Troisième partie : Avec GeoplanW (ou un autre logiciel de géométrie dynamique)

Pour résoudre les questions suivantes, vous pouvez faire d'autres figures ou utiliser le fichier Fonction dans GeoplanW avec les indications données par l'enseignant en début de séance. Représenter dans un repère orthonormé la longueur opposée à la rivière en fonction de la longueur adjacente à la rivière, puis l'aire du terrain en fonction de la longueur adjacente à la rivière. A l'aide des graphiques répondre aux questions suivantes :

1. Quelles sont les valeurs possibles des côtés du terrain adjacents à la rivière ?
2. Quelles sont les valeurs possibles du côté du terrain opposé à la rivière ?
3. Pour quelles valeurs l'aire est-elle maximale ?

Ce scénario a l'avantage de permettre une entrée dans la situation par des exemples numériques simples. On espère qu'ils aideront les élèves à dégager le mécanisme qui permet de généraliser et d'écrire une expression algébrique, pour arriver à la modélisation via une fonction.

Mais cette construction présente aussi des inconvénients. On constate souvent que certains élèves ont du mal à s'abstraire des valeurs numériques suggérées au début pour généraliser. D'autre part, on demande de généraliser alors qu'aucun problème ne le justifie encore. Il est tentant de court-circuiter cette étape pour essayer de traiter la suite, d'autant plus que les questions posées peuvent être explorées par accumulation de nouveaux exemples numériques.

C'est pourquoi on peut suggérer qu'il serait plus efficace de présenter à l'élève une question qui le laisse maître de ses expérimentations, mais dont la réponse exige plus qu'une exploration d'exemples numériques.

En voici une : *« Peut-on obtenir une aire de 200 000 m² pour l'enclos ? »*

On a pris soin de choisir une aire supérieure au maximum, de sorte que la réponse soit « non ». Mais la **preuve** que la réponse est « non » ne peut se faire en rendant compte de quelques échecs…

On a ainsi des chances d'amener les élèves vers une démarche algébrique, qui ici va amener à écrire une équation, et donc d'abord à introduire une inconnue. Cette équation du second degré, les élèves de Seconde ne savent pas la résoudre. Le professeur, en fonction des objectifs qu'il voudra fixer, et des idées éventuellement émises par les élèves, dispose de deux stratégies possibles :

- écrire l'équation sous la forme $f(x) = 0$ et aider les élèves à transformer l'expression algébrique $f(x)$ obtenue : il s'agit d'arriver à la somme d'un carré et d'un nombre positif pour pouvoir conclure quand à l'absence de solution ;
- profiter des expérimentations numériques prévisibles des élèves pour amener à la définir une fonction, c'est à dire changer le statut de « x » pour le considérer comme une variable, et

poser ensuite le problème du maximum éventuel de cette fonction. Bien entendu, la transformation algébrique nécessaire sera la même.

Cependant, dans le deuxième cas, il faut être préparé à l'idée que les élèves pourront alors travailler dans le cadre graphique et obtenir une réponse approchée en examinant la courbe qu'ils auront dessinée ou celle que pourra construire une calculatrice graphique ou un logiciel. Il sera alors pour eux plus difficile d'admettre la nécessité d'un travail algébrique.

On peut penser, a priori, que le choix de rester dans le traitement de l'équation a plus de chances de conduire à un « blocage » nécessitant un travail algébrique pour en sortir...

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, *on donne les point A (2 ; 3) et B (2 ; 0).*

Soit M un point variable sur l'axe des abscisses, on note x l'abscisse de M.

P est le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe (O y).

Comment varie l'aire du triangle OMP lorsque M varie sur l'axe (O x) ?

Il s'agit d'utiliser les outils algébriques pour modéliser la situation grâce à une fonction puis de conjecturer des propriétés avec une calculatrice graphique.
Les pré-requis sont nombreux : vecteurs colinéaires, équations de droites, propriété de Thalès, triangles semblables, valeur absolue et distance, notion de fonction et utilisation d'une calculatrice graphique.

Comme souvent quand l'énoncé n'impose pas explicitement la détermination d'une expression fonctionnelle, on peut s'attendre, en Seconde et même très largement en Première, à une exploration numérique, pouvant déboucher sur des tableaux de valeurs et des essais de représentation graphique. La présence ici de deux branches de courbe va certainement poser des problèmes et provoquer des discussions intéressantes...
Dans une classe qui a déjà pris l'habitude du recours aux calculatrices graphiques, les élèves devraient être motivés pour recourir à la création d'une expression algébrique pour modéliser la situation. On verra donc apparaître la formule $Aire = \frac{1}{2}\times \mathrm{OM}\times \mathrm{OP}$ où il faudra exprimer OM et OP en fonction de x. Ce n'est pas simple, il faut avoir recours aux valeurs absolues ou à une disjonction de cas. Plusieurs stratégies sont possibles, ce qui permet de réinvestir un bon nombre de notions :

- utiliser le théorème de Thalès ou les triangles semblables, ce qui conduit à $\mathrm{OP} = \mathrm{AB}\times\frac{\mathrm{MO}}{\mathrm{MB}}$. Il reste alors à comprendre que $\mathrm{OM} = |x|$ et que $\mathrm{MB} = |x-2|$.

- chercher à calculer les coordonnées de P, puis utiliser $\mathrm{OM} = |x|$ et $\mathrm{OP} = |y_{\mathrm{P}}|$. On peut penser, par exemple, à calculer les coordonnées de P en utilisant une équation de la droite (AM). Mais ici les élèves vont se heurter à un problème de dénomination des variables : on a noté x l'abscisse de M, et on aurait tendance à chercher une équation de (AM) dans le repère $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ sous la forme $y = mx + p$! Il faudra noter par exemple X et Y les coordonnées d'un point quelconque du plan. Il est douteux que beaucoup d'élèves soient à l'aise face à l'équation réduite de (AM) : $Y = \frac{3}{2-x}(X-x)$...

Cependant, on dispose d'une autre idée : en exprimant que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ sont colinéaires, on aboutit à un calcul des coordonnées de P beaucoup plus abordable par les élèves.

Ce problème est du type de ceux pour lesquels un utilisateur de logiciels de géométrie dynamique construira facilement deux fichiers : un fichier « maître » où l'on visualise la situation géométrique avec le point M libre sur (Ox) et un fichier qui importe les données numériques du fichier maître pour construire la représentation graphique de la fonction Aire.
Si l'on met ces deux fichiers à la disposition des élèves, **c'est en quelque sorte le logiciel qui fournit un procédé graphique de définition de la fonction, à la place d'une définition**

algébrique. De plus il n'est pas nécessairement facile pour tous les élèves de bien comprendre que la courbe visualisée représente les variations de l'aire du triangle (on peut essayer de les aider par des affichages numériques de x et de l'aire dans les deux fichiers).

L'activité consiste ensuite à émettre des conjectures liées à l'allure de la courbe. On peut donc s'attendre à un jeu de traductions entre le cadre graphique et le cadre géométrique : **il n'y a pas de raison forte pour que le passage dans la cadre algébrique soit perçu comme nécessaire**. S'il est demandé par le professeur, il sera alors ressenti comme une exigence « gratuite »...

Ce qui est proposé ici, c'est de montrer aux élèves le fichier qui illustre la situation géométrique, pour concrétiser ce triangle d'aire variable, mais de leur laisser ensuite la responsabilité de produire des résultats qui permettront de répondre à la question.

Conclusion

A travers les exemples ci-dessus, on voit qu'un certain nombre de préalables sont nécessaires à un travail de modélisation fructueux.
Le choix des situations est essentiel : des problèmes trop simples ne permettent pas de créer le besoin d'un recours à l'algèbre. Il ne faut pas craindre de dépasser le cadre de la classe concernée, quitte à ce qu'une intervention du professeur soit nécessaire.
Les élèves doivent pouvoir s'approprier facilement le questionnement, notamment par une exploration numérique. C'est souvent une étape incontournable mais il ne faut pas pouvoir répondre avec certitude en restant dans le cadre numérique : des problèmes sans solution, ou dont la solution n'est pas un décimal doivent être privilégiés.
Pour faire la preuve de son efficacité et de sa pertinence, le passage à la formulation algébrique ne doit pas être prescrit par le texte de l'exercice ni par le professeur. Au contraire, il faut s'efforcer de faire ressortir la nécessité de cette modélisation algébrique et il incombera ensuite aux élèves de la formaliser. Le recours aux TICE peut contribuer à créer ce besoin à condition de ne pas proposer une activité « clef en main » qui serait alors tout à fait « contre productive ».
Ce type de travail peut apparaître comme très coûteux en temps, mais, n'est-ce pas plutôt un investissement qui sera rentabilisé tout au long de l'année, et qui contribuera à apprendre aux élèves comment on aborde un problème sans être guidé d'emblée dans la bonne direction ?

3. Des problèmes pour prouver, pour démontrer : des propriétés numériques, algébriques, géométriques

3.1 Le calendrier

Objectifs :
Produire et transformer des expressions algébriques afin de généraliser et démontrer une propriété constatée.

Document distribué aux élèves :

		$4^{ème}$
A	Le calendrier	k

Janvier

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
53						1	2
1	3	4	5	6	7	8	9
2	10	11	12	13	14	15	16
3	17	18	19	20	21	22	23
4	24	25	26	27	28	29	30
5	31						

Février

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
5		1	2	3	4	5	6
6	7	8	9	10	11	12	13
7	14	15	16	17	18	19	20
8	21	22	23	24	25	26	27
9	28						

Mars

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
9		1	2	3	4	5	6
10	7	8	9	10	11	12	13
11	14	15	16	17	18	19	20
12	21	22	23	24	25	26	27
13	28	29	30	31			

Avril

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
13					1	2	3
14	4	5	6	7	8	9	10
15	11	12	13	14	15	16	17
16	18	19	20	21	22	23	24
17	25	26	27	28	29	30	

Mai

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
17							1
18	2	3	4	5	6	7	8
19	9	10	11	12	13	14	15
20	16	17	18	19	20	21	22
21	23	24	25	26	27	28	29
22	30	31					

Juin

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
22			1	2	3	4	5
23	6	7	8	9	10	11	12
24	13	14	15	16	17	18	19
25	20	21	22	23	24	25	26
26	27	28	29	30			

Juillet

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
26					1	2	3
27	4	5	6	7	8	9	10
28	11	12	13	14	15	16	17
29	18	19	20	21	22	23	24
30	25	26	27	28	29	30	31

Août

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
31	1	2	3	4	5	6	7
32	8	9	10	11	12	13	14
33	15	16	17	18	19	20	21
34	22	23	24	25	26	27	28
35	29	30	31				

Septembre

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
35				1	2	3	4
36	5	6	7	8	9	10	11
37	12	13	14	15	16	17	18
38	19	20	21	22	23	24	25
39	26	27	28	29	30		

Octobre

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
39						1	2
40	3	4	5	6	7	8	9
41	10	11	12	13	14	15	16
42	17	18	19	20	21	22	23
43	24	25	26	27	28	29	30
44	31						

Novembre

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
44		1	2	3	4	5	6
45	7	8	9	10	11	12	13
46	14	15	16	17	18	19	20
47	21	22	23	24	25	26	27
48	28	29	30				

Décembre

	Lu	Ma	Me	Je	Ve	Sa	Di
48				1	2	3	4
49	5	6	7	8	9	10	11
50	12	13	14	15	16	17	18
51	19	20	21	22	23	24	25
52	26	27	28	29	30	31	

1- Choisir un mois.
2- Dans ce mois, tracer un cadre de côté 3 jours sur 3 jours.
3- Calculer la différence des produits diagonaux des nombres extrêmes.

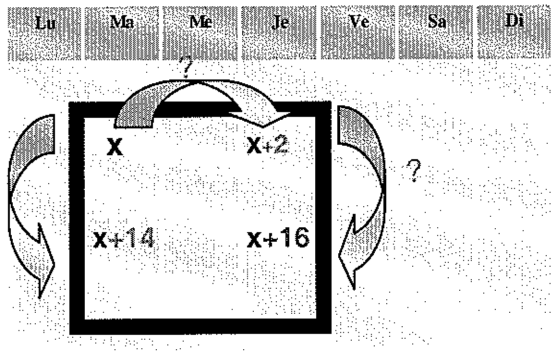
<u>Scénario envisagé</u>

Phase de lancement	**<u>Présenter le travail à faire aux élèves</u>** : Dans un calendrier : - Choisir un mois - Dans ce mois, tracer un cadre de côté 3 jours - Dans ce cadre calculer la différence des produits des nombres extrêmes (*Illustrer le travail à faire à l'aide d'un exemple ou d'un fichier PowerPoint*) **<u>Distribuer le document élève</u>**
Phase de recherche : travail individuel	Le calcul est à faire pour (au moins) deux cadres différents. Cette phase ne doit pas être spécialement longue, 10 minutes sont suffisantes pour que chaque élève ait au moins fait deux calculs.
Phase de mise en commun 1	**<u>Mise en commun : oralement</u>** 1- Interroger un élève : ***Quel mois as-tu choisi ? Ton cadre part de quel nombre ? Quel calcul as-tu fais ? Quel résultat as-tu obtenu ?*** 2- Procéder sur un modèle semblable à celui-ci sur 2, 3 exemples. 3- Question : ***Que semble t-il se passer quand on calcule la différence des produits des extrêmes ?*** Réponse attendue : ***on obtient toujours 28.*** 4- Question : ***Est-ce que tout le monde a trouvé 28 ?*** Réponse attendue : ***non on obtient aussi – 28.*** 5- Faire remarquer que le signe dépend de l'ordre dans lequel on a fait le calcul (« en partant du nombre en haut à gauche ou du nombre en haut à droite ») 6- Question : ***Quelle conjecture peut-on faire*** ? Réponse attendue (formulée avec les mots des élèves une réponse semblable à) : **Dans un mois, lorsque l'on dessine un cadre de 3 jours sur 3 jours, la différence des produits diagonaux des nombres extrêmes est toujours égale à 28 ou -28**
Transition	Question : ***On vient de constater ceci sur quelques exemples. Est-ce que c'est vrai tout le temps ?*** Réponse attendue : ***non, il faut le démontrer.*** Amener les élèves au raisonnement suivant : il faut démontrer que l'on obtient 28 ou – 28 pour n'importe quel cadre de 3 jours sur 3 jours pris dans n'importe quel mois de n'importe quelle année.

<table>
<tr>
<td>Phase de recherche - Bilan :
par dialogue et travail individuel</td>
<td>

1- Présenter aux élèves un calendrier « vide » et dessiner dans ce calendrier un cadre de 3 jours sur 3 jours.

2- Noter x, la première case vide et compléter les autres cases par dialogue avec les élèves.



3- Produire par dialogue les deux expressions correspondant au calcul demandé :

$x(x + 16) - (x + 2)(x + 14)$ $\qquad$ $(x + 2)(x + 14) - x(x + 16)$

4- Demander aux élèves de transformer ces deux expressions (travail individuel)

5- Deux élèves au tableau font la correction.

6- Bilan oral, puis écrit dans le cahier :

Dans un mois, lorsque l'on dessine un cadre de 3 jours sur 3 jours, la différence des produits diagonaux des nombres extrêmes est toujours égale à 28 ou -28

(utiliser le fichier Powerpoint)

</td>
</tr>
<tr>
<td>Phase de réinvestissement</td>
<td>Poser les questions suivantes :
- Si le cadre à 4 jours de côté ? 5 jours de côté ?</td>
</tr>
</table>

3.2 Autres exemples

- Tous les problèmes de démonstration de propriétés arithmétiques ou géométrique

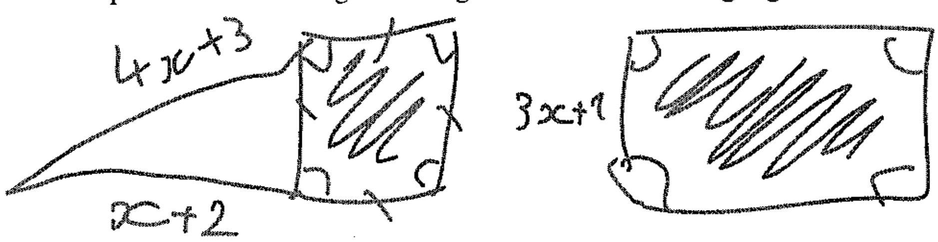
Exemples :

  - La somme de deux nombres impairs est paire
  - La somme de 3 entiers consécutifs est un multiple de 3

- Variante : Problème dont les premières valeurs aboutissent et la généralisation est fausse
  $x^2 = 3x - 2$ semble vraie pour un test avec 1 et 2 …

- Aires égales

Prouver que l'aire du carré grisé est égale à l'aire du rectangle grisé.



5x+5

4. Des problèmes pour mettre en équation : quels problèmes pertinents ?

Objectifs

Souvent associée à la résolution de problèmes, la mise en équation est reléguée au second plan et n'est qu'une passerelle permettant de vérifier la technique de résolution d'équation étudiée en 4^e .
Comment lui rendre une place essentielle, Structurante, pour introduire la notion d'équation à partir de la nécessité d'utiliser une démarche algébrique pour résoudre un problème, la démarche arithmétique s'avérant inopérante.

La boite noire

http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/123maths/4/equations/boite_noire

L'idée est de disposer dans la classe d'un ordinateur ouvert sur *la boite noire.* Cette page html ne comporte ni indications, ni consignes. Mais, elle vise à permettre à l'élève de structurer la mise en équation (*passage du symbole ? à une variable, utilisation du signe d'égalité comme relation d'équivalence, obligation de définir une inconnue ...*). La boite noire est composée d'une zone d'entrée où l'élève doit réussir à y *traduire* son problème pour « qu'elle » lui donne une solution *vérifiable.*

Mise en place de la séance : Scénario a priori

Début de l'heure :

- **On pose la consigne**
  Distribution d'une fiche comportant 14 problèmes (Voir fiche élève en fin de paragraphe)
  Présentation de la *boite noire* et explique qu'elle « permet » de résoudre ces problèmes mais qu'il faut les *traduire* dans son langage...
  La classe se regroupe en binômes.

- **Un premier temps de recherche**
  Chacun cherche par binôme.
  La communication avec la machine doit engager l'élève dans une démarche algébrique et aboutir à n'utiliser qu'une lettre représentant l'inconnue.

- **Premier bilan**
  Mise en commun des expériences de chaque groupe.

  Analyse le premier exercice : *la balance.*

  On reprécise le but : « il ne s'agit pas de trouver les réponses mais, de les faire trouver pas l'ordinateur puis, de les vérifier ».

  Une idée sur la structure d'équation devrait sortir de cette mise en commun

- **Un second temps de recherche**

Les élèves cherchent par binôme ...
Des exercices similaires sont dispersés dans la fiche pour permettre de consolider l'idée de mise en équation ...

- **Bilan et remise en route**

Une correction de quelques *mises en équation* s'impose pour relancer la classe ...

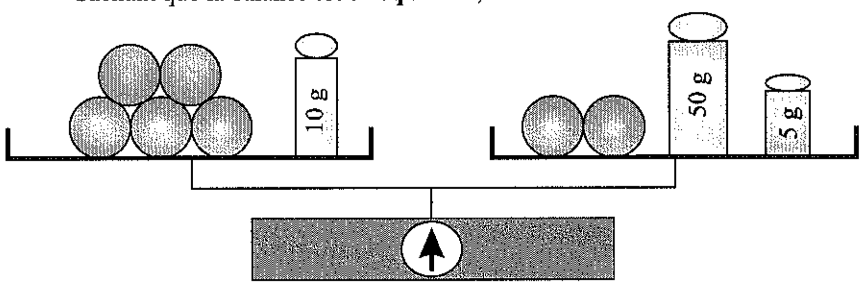
Le document élève : La boite noire

http://www.ac-amiens.fr/pedagogie/maths/123Maths/4/equations/boite_noire

Voici une série de problèmes. ***Le but n'est pas de les résoudre*** *! Mais de trouver une façon de les traduire pour que la* ***boite noire*** *les résolvent à votre place.*
A vous ensuite de juger si l'ordinateur vous fait une proposition satisfaisante.

Problème 1 :

Sachant que la balance est en **équilibre**, calculer la masse d'une bille :



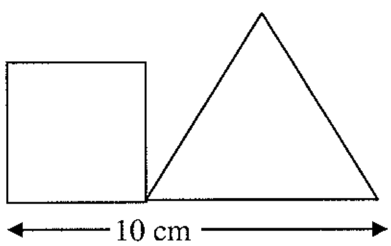
Problème 2 :

Le magicien : " Penser un nombre, multiplier par 2, enlever 3, multiplier le résultat par 3 et enlever le nombre pensé au départ. Quel est le nombre que vous obtenez ? "
Un spectateur : " 31 "
Le magicien : " Le nombre pensé au départ est .... "
Un spectateur : " C'est exact "
Qu'a répondu le magicien ?

Problème 3 :

Un père a 42 ans et son fils 12 ans.
Dans combien d'années l'âge du père sera le triple de l'âge du fils ?

Problème 4 :
Quelle valeur faut-il donner au côté du carré
pour qu'il ait le même périmètre que le triangle équilatéral?



Problème 5 :

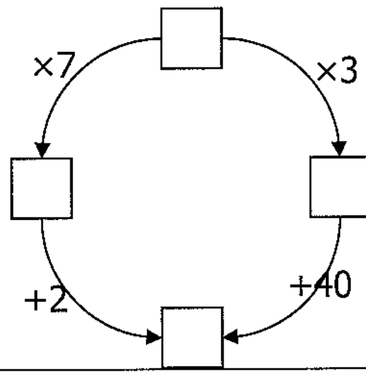
Une balance est en équilibre lorsque l'on place 10 cubes et 2 kg sur un des plateaux et 2 cubes et 30 kg sur l'autre. Quelle est la masse x d'un cube ?

Problème 6
La longueur d'un rectangle dépasse sa largeur de 12 mètres. Le périmètre de ce rectangle mesure 484 m. Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

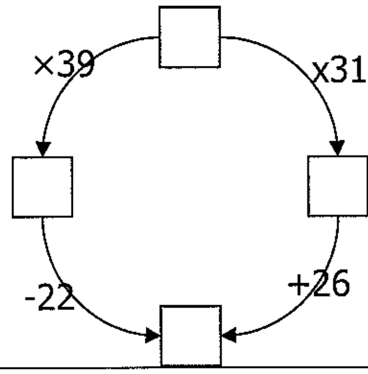
Problème 7

Je voulais acheter 5 kilogrammes de fruits, mais il me manquait 1 € 50. En prenant seulement 3 kilogrammes, il m'est resté 2 € 50. Quel est le prix d'un kilogramme de fruits ?

Problème 8

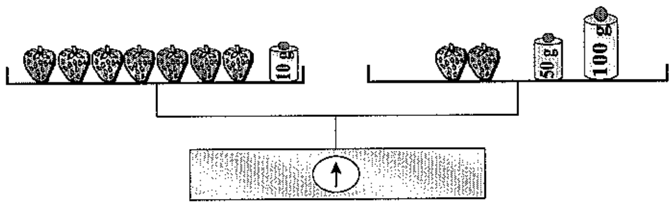


Problème 9



Problème 10 :

Sachant que la balance est en équilibre et que les fraises sont identiques, **calculer** la masse d'une fraise.



	Questions	*Réponses*		*Questions*	*Réponses*
1			*6*		
2			*7*		
3			*8*		
4			*9*		
5			*10*		

Premier bilan enseignant :

La séance s'est déroulée correctement et a permis de structurer l'idée d'équation.
Les élèves ont cherché l'inconnue puis ont traduit le problème à l'aide d'une égalité. Ils ont obtenu une réponse au problème à partir de la résolution de leur équation par la boîte_noire. Plus tard, ils pourront l'obtenir par une méthode de résolution algébrique. Après, ils ont testé la réponse et ont conclu
Bien entendu, le travail de résolution reste à faire mais, les élèves ont accepté de résoudre des problèmes sans démissionner immédiatement le problème posé.

D. Transformer pour quoi faire

1. Transformer pour démontrer

Objectifs communs à ces versions

Transformer une expression algébrique pour mettre en évidence ses propriétés.

Niveau concerné

Classes de Seconde

Énoncé

On donne l'expression $A(x) = (3x-7)^2 + 18x - 40 + 7x^2$.

Voici différentes versions, plus ou moins ouvertes, d'un problème que l'on peut proposer aux élèves au sujet de cette expression :

Version 1

Déterminer le signe de $A(x)$ pour tout x réel.

Version 2

Démontrer que $A(x)$ est un carré pour tout x réel.

Version 3

1. Calculez $A(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.
2. Quelle conjecture pouvez-vous proposer au sujet de $A(x)$, pour tout x réel ?
3. Démontrez votre conjecture.

ou :

Version 3 bis

Les deux premières questions comme ci-dessus, puis :

3. Déterminez deux réel a et b tels que, pour tout x réel : $A(x) = (ax+b)^2$. Ceci justifie-t-il votre conjecture ?

Commentaires

Placés devant le choix de traiter l'une des versions 1, 2 ou 3 bis, les élèves ont majoritairement (mais pas toujours...) choisi la version 3 bis. On pouvait s'y attendre : il y a des calculs numériques pour entrer dans le problème et un objectif clair pour conclure.

Le professeur pourra penser que, dans une séance de module par exemple, il peut lancer la réflexion par une version plus ouverte et n'utiliser les questions auxiliaires que pour surmonter les blocages.
Cependant, les versions 3 ne présentent-elles pas une vision un peu trop simplifiée de la démarche mathématique ? Que doit-on penser d'une conjecture pour tout x réel lancée sur la foi de résultats obtenus pour les valeurs 0, 1, 2 et 3 ? Certes, cela justifie sans doute d'autant plus la nécessité d'une démonstration ! Mais si les élèves ont produit la conjecture attendue, ne va-t-on pas les conforter dans l'idée que en mathématiques on s'obstine à justifier ce que tout le monde voit ?

On peut se demander s'il n'y pas, ici, consensus autour d'un implicite au sujet de x : en fait, x est entier ! Pour celui qui pose le problème, cela ne change rien à la solution à produire...Pour celui qui le traite, le passage des exemples à « tout réel x » a-t-il vraiment de la signification ? Mais naturellement, travailler dans l'ensemble des entiers naturels permettrait au moins une conjecture exacte (A(x) est entier) peu intéressante pour l'objectif visé... Peut-être une version légèrement alourdie permettrait-elle d'aider à la prise de conscience des enjeux de la généralisation :

Version 4

1. Calculez $A(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$.
2. Quelle conjecture pouvez-vous proposer au sujet de $A(x)$?
3. Calculez $A(x)$ pour $x = \frac{5}{3}$.
4. Maintenez-vous votre conjecture pour tout x réel ? Alors démontrez-la...
5. Sinon, cherchez une conjecture pour tout x réel et démontrez-la.

On remarquera tout de même qu'il n'est pas si facile de faire intervenir les irrationnels dans l'exercice...

2. Étude d'une aire

Objectifs

L'objectif essentiel de l'activité est l'étude du comportement asymptotique d'une fonction. Le problème reprend la situation proposée dans le document « Modéliser une situation (2) ».

Niveau concerné : classes de Première

Place dans la progression

Telle que la fiche élève est rédigée, on peut, au choix, la proposer à des élèves ayant déjà abordé la notion de limite infinie et les problèmes d'asymptotes, ou bien s'en servir pour une approche de ces notions.

Voici cette fiche :

Fiche élève

Dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$, *on donne les point A(2 ; 3) et B(2 ; 0).*

Soit M un point variable sur [Bx), on note x l'abscisse de M.

P est le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe (Oy).

On étudie certaines propriétés de l'aire du triangle OMP en fonction de x.

I. On note donc A(x) cette aire : déterminer une expression algébrique de A(x) en fonction de x.

Ouvrez les fichiers « triangle » et « airetriangle1 », mettez l'affichage en mode « mosaïque » (menu « fenêtre »). Mettez le fichier « airetriangle1 » en mode « Trace » puis activez le fichier « triangle ». Pilotez la valeur de x au clavier : flèches « gauche » ou « droite ».

II. Que se passe-t-il pour $x = 2$? A quoi cela correspond-il pour l'expression algébrique A(x), et la fonction $x \mapsto \mathrm{A}(x)$?

III Comportement de $A(x)$ pour de « grandes » valeurs de x

En appuyant sur les touches « d », « c », « m », vous affectez à x les valeurs 10, 100, 1000. Observez les figures dans ces cas.

Voici deux raisonnements qui conduisent à deux conjectures différentes :

a. Pour des valeurs de x de plus en plus grandes, l'aire ressemble à un rectangle de hauteur 3 et de largeur x. Elle doit donc avoir des valeurs « proches » de $3x$.

b. Pour des valeurs de x de plus en plus grandes, l'ordonnée du point P se rapproche de 3. L'aire d'un triangle de base x et de hauteur 3 vaut $1{,}5x$: on doit donc observer des valeurs « proches » de $1{,}5x$.

L'un de ces raisonnements vous paraît-il conforme à vos observations ? Ou pouvez-vous concevoir une troisième possibilité ?

En appuyant deux fois sur la touche « a », vous obtenez l'affichage d'une valeur approchée de l'abscisse x de M, puis d'une valeur approchée a de l'aire du triangle. Un nouvel appui sur la touche « a » fera disparaître l'affichage.

Vous pouvez aussi vous aider du fichier « airetriangle2 » : l'ouvrir en mode plein écran, piloter la position de M au clavier. Les touches d, c et m ont les mêmes fonctions que dans le fichier « triangle »...

Quels calculs proposez-vous de conduire sur A(x) pour trancher ? A quelle conclusion conduisent-ils

Question I

Cette fois, la construction d'une fonction dans le cadre algébrique est exigée à priori. On s'adresse à des élèves plus familiers de la notion de fonction.

Compte tenu de l'objectif principal, le déplacement du point M est limité à la demi-droite [Bx), ce qui évite la discussion détaillée qui serait nécessaire pour l'obtention de l'expression algébrique $A(x)$, si M parcourait tout l'axe des abscisses. Ainsi x désigne à la fois l'abscisse de M et la longueur OM, de même $x - 2$ désigne OP et y_P : on évite donc le recours aux valeurs absolues. Mais peut-être cette simplification entretiendra-t-elle une confusion dans l'esprit de certains élèves.

Les stratégies pour obtenir $A(x)$ ont été analysées dans le document « Modéliser une situation (2) », mais on peut penser que la formule de l'aire d'un triangle induira plutôt l'utilisation de la propriété de Thalès.

Question II

Il s'agit ici d'exprimer un même phénomène de diverses façons suivant les cadres utilisés : au-delà des expression « naturelles » liées au cadre géométrique (« le point P n'existe pas » ou « le triangle OMP n'existe pas ») on s'attache à souligner qu'une « expression non calculable pour... » se traduit par « une fonction non définie en... ».

Question III

Les conjectures proposées se fondent sur l'impression visuelle obtenue dans le cadre géométrique. En principe les valeurs numériques affichées suffisent à invalider la première, et peut être aussi la deuxième, encore que, dans la rédaction adoptée, il faille s'entendre sur ce que l'on entend par « proche de ».

De toutes façons, l'élève devrait, soit être tenté d'accepter la deuxième conjecture, soit remarquer que, pour de grandes valeurs de x, l'écart entre $A(x)$ et $1{,}5x$ se « stabilise » et vaut pratiquement 3.

C'est dans le cadre algébrique que l'on va trouver les outils de validation adéquats :

1. Soit on calcule la différence $A(x) - 1{,}5x$ et on fait tendre x vers $+\infty$. Ce peut être pour tenter de justifier la deuxième conjecture (et dans ce cas il va falloir accepter le verdict du calcul algébrique !) ou avec pour objectif de prouver que l'expression obtenue tend vers 3 ;
2. Soit on note que la conjecture signifie que l'on peut donc approcher $A(x)$ par $1{,}5x + 3$ et l'on calcule $A(x) - 1{,}5x - 3$ avec l'objectif de prouver que l'expression obtenue tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Remarque : dans le cadre algébrique, on trouve un « raisonnement » qui modélise la conjecture b :

On écrit $A(x) = \frac{1}{2}.x.\frac{3x}{x-2}$, donc comme $\frac{3x}{x-2}$ tend vers 3…

Certains élèves peuvent avoir du mal à admettre que ce raisonnement est faux.
Dans le cadre géométrique, on peut s'intéresser à « l'excédent » de l'aire du triangle POM par rapport au triangle QOM (où Q a comme coordonnées (0 ; 3)) : c'est l'aire du triangle PQM (fichier « airetriangle2 »), mais ce triangle s'aplatit et on peut encore imaginer que son aire tend vers 0…
Ici on peut avoir recours au cadre graphique en demandant aux élèves de tracer les droites d'équation $y = 1{,}5x$ et $y = 1{,}5x + 3$ (menu « créer », « ligne », « droite », « définie par une équation ») dans le fichier « airetriangle1 » et d'observer ensuite la trace du point de coordonnées $(x\ ;\ A(x))$.

E. Un pas de côté pour approfondir

Progressivité des apprentissages de l'école au collège : des pistes pour l'introduction des lettres et du calcul algébrique : Brigitte Grugeon-Allys, IUFM de l'académie d'Amiens, Equipe DIDIREM, Université Paris 7

Ce texte est le fruit d'une collaboration riche avec, les chercheurs en didactique des mathématiques, les IPR, les formateurs, les enseignants du second degré, collaboration menée à l'IUFM d'Amiens depuis 2003 dans le cadre du groupe algèbre. L'enjeu de ce groupe était double :

- pointer des difficultés rencontrées par les professeurs dans l'enseignement secondaire pour permettre « l'assimilation progressive du langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes »,
- produire des ressources à mettre à leur disposition et à celle des formateurs.

Au-delà des difficultés rencontrées par les élèves sur lesquelles je vais revenir en détail, je présente des problèmes d'enseignement posés aux enseignants, recueillis dans le cadre du travail commun.

> *Comment amener les élèves de l'école à négocier des ruptures entre le numérique et l'algébrique (statut du signe d'égalité, rôle des parenthèses, statut des lettres et opérateurs, ...) ?*
>
> *Comment engager les élèves dans la nécessité d'introduire puis de manipuler des lettres et des expressions littérales ?*
>
> *Quels types d'activités peut-on proposer aux élèves afin qu'ils soient plus à l'aise avec les différents statuts des lettres (inconnue, variable, indéterminée)?*
>
> *Quelles activités permettent de voir l'algèbre comme un outil performant ? Avec quelle organisation didactique dans la classe ?*
>
> *Comment réguler l'enseignement et organiser des remédiations adaptées aux difficultés rencontrées par les élèves ?*

Dans une première partie, je présente les évolutions des nouveaux programmes de collège, puis je donne un éclairage sur les choix retenus à partir de résultats de recherche pour comprendre les évolutions proposées et propose des perspectives pour l'entrée dans la pensée algébrique. Pour terminer, je donne quelques pistes pour tenter une progressivité dans l'apprentissage du calcul littéral de la sixième à la seconde.

I. La rénovation des programmes du collège : des évolutions

I.1. Éclairages du rapport sur le calcul (CREM 2001)

La lecture du rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement de mathématiques éclaire et pointe des origines des difficultés rencontrées par les élèves et les enseignants.

> *« Dans la culture, les deux termes : calcul mathématique et raisonnement apparaissent comme antagonistes » (...) Le calcul renvoie à une activité purement mécanique, automatisable, sans intelligence, il est réduit à sa part mécanisée. Son apprentissage renvoie à l'idée d'entraînement purement répétitif. (...) On estime par ailleurs que, si l'on dispose d'instruments pour effectuer la partie mécanisée du calcul, il n'y a plus rien à apprendre puisque le calcul s'y réduit. En bref, le calcul renvoyant aux basses œuvres du*

travail mathématique, tandis que sa partie noble, celle liée au raisonnement est plutôt associée à la résolution de problèmes géométriques. Cette image, ancrée dans la culture, est aussi portée par l'enseignement. Le calcul qu'il soit numérique ou algébrique, est en fait réduit à ses traces et le raisonnement qui le guide reste invisible. Ses résultats sont vus comme des données, ils n'ont pas valeur de preuve.
Il y a dans l'enseignement, à lutter contre cette vision réductrice du calcul »

Les nouveaux programmes permettent-ils de lutter contre cette vision réductrice du calcul en redonnant au raisonnement une place centrale ?

I.2. La rénovation des programmes du collège : des évolutions

La lecture des projets de nouveaux programmes met en évidence des évolutions qui permettent de penser et d'aborder autrement le calcul et plus particulièrement le calcul littéral.

- *Placer la notion de modélisation et l'emploi du calcul littéral au cœur des programmes du collège*

Je vais pointer les principales évolutions relatives à notre thème.
Dans l'introduction, au-delà de la présentation des finalités et objectifs du programme rappelant le rôle des mathématiques comme discipline de formation générale, comme outil pour résoudre des problèmes, comme discipline d'expression, il apparaît d'emblée une modification majeure dans l'organisation des contenus, avec la réintroduction d'une partie « Grandeurs et mesure » et la réorganisation des parties donnant une place première à la notion de fonction.

« A travers les activités sur les longueurs, les aires et les volumes, les élèves peuvent se construire et utiliser un premier répertoire de formules » (6ième) .....

L'enjeu est de donner du sens au calcul mathématique, dans ses rapports avec le réel et les autres disciplines scientifiques. La notion de modélisation vient donc au cœur des programmes du collège.

De plus, dès l'entrée, les programmes motivent l'usage de l'outil algébrique pour résoudre des problèmes. C'est l'occasion de pointer la multiplicité de ses emplois qui conduit à mettre en jeu divers objets de l'algèbre : égalité, identité, équation. Dans la partie *Nombres et calcul*, on peut lire :

« Assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre les problèmes (en particulier distinguer, égalité, identité, équation) »

- *Redonner au calcul algébrique sa valeur de preuve*

Pour combattre la vision réductrice du calcul comme activité mécanique, les programmes attribuent une place majeure au calcul algébrique comme valeur de preuve.
« La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. (...) Si, pour cet objectif, le domaine géométrique occupe une place particulière, la préoccupation de prouver et de démontrer ne doit pas s'y cantonner. Le travail sur les nombres, sur le calcul numérique, puis sur le calcul littéral offre également des occasions de démontrer. »

- *Redonner au calcul algébrique sa fonction généralisatrice*

De plus, dans la nouvelle rubrique « Grandeurs et mesure », les programmes fournissent des occasions pour produire des formules et les transformer afin d'engager la réflexion sur la

notion de fonction. Il s'agit aussi dans les nouveaux programmes de donner une place au calcul algébrique pour sa fonction généralisatrice.
« Certains travaux sur les périmètres conduisent à décrire des situations mettant implicitement en jeu des fonctions, notamment à travers l'utilisation de formules. »

- *Redonner une place au calcul intelligent*

De plus, au-delà du calcul numérique sous ses différentes formes, qui vise la réflexion et l'initiative dans le choix de l'écriture appropriée d'un nombre suivant la situation, les projets de programmes ont la volonté de redonner une place au calcul intelligent :
- d'une part en *veillant à ce que les élèves donnent du sens aux écritures*
« L'initiation aux écritures littérales se poursuit. Le calcul littéral, au sens des transformations d'écriture, fait l'objet d'un premier travail en 5ième et se développe en 4ième »
« L'intégration des lettres dans ce type d'égalités est une difficulté qu'il faut prendre en compte. Elle s'appuie sur des situations empruntées aux cadres numérique ou géométrique dans lesquels les identités comme $5(x+1)=5x+5$, $2x+2y = 2(x+y)$ ... sont travaillées. » (5ième, Distributivité de la multiplication par rapport à l'addition)
- d'autre part *en s'appuyant nécessairement sur l'interprétation et la reconnaissance de la structure des expressions (somme, produit) et l'identification des termes ou des facteurs qui y figurent* (programme de 4ième) pour mettre en place des leviers sur lesquels les élèves vont pouvoir s'appuyer dans le choix de l'écriture appropriée d'une expression en fonction de la tâche visée.

I.3. Un appui : des recommandations du rapport sur le calcul (CREM 2001)

Ces évolutions sont portées par les recommandations du rapport sur le calcul réalisé dans le cadre de la commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques » en 2001 dirigé par Jean-Pierre Kahane.
En particulier, elles visent à :
- Renforcer tout au long de la scolarité les rapports entre raisonnement et calcul,
- Associer davantage les situations numériques puis algébriques à l'entrée dans la rationalité mathématique,
- Développer un calcul instrumenté de façon intelligente et contrôlée,
- Enrichir les contextes mathématiques de calcul et renforcer les rapports avec les autres disciplines.

II. Eclairer, comprendre les évolutions à partir des résultats de recherche

Je vais m'appuyer sur des résultats de recherche en didactique des mathématiques pour éclairer et comprendre en quoi ces évolutions permettent d'appréhender différemment les difficultés rencontrées dans l'enseignement.

En référence à notre tradition culturelle, que partagent d'ailleurs d'autres pays, l'enseignement privilégie une entrée dans le monde algébrique par le calcul littéral sans réelle fonctionnalité et la résolution d'équations et d'inéquations associées à diverses situations dites de la vie quotidienne ou des situations mathématiques. Cette entrée est de plus assez tardive en comparaison de l'enseignement dans les pays anglo-saxons. Au-delà du fait que le calcul est essentiellement perçu comme *purement mécanique, automatisable, sans intelligence,* ces choix didactiques peuvent provoquer des ruptures importantes dans les pratiques de calcul lors du passage du calcul numérique au calcul l'algébrique

Au contraire, les nouveaux programmes laissent un espace ouvert pour permettre d'autres entrées dans le calcul algébrique sans complètement bouleverser la culture existante, pour développer la rationalité mathématique en lien avec sa fonction généralisatrice et sa valeur d'outil de preuve. En quoi ces choix peuvent-ils favoriser une plus progressivité des apprentissages ?

Je vais d'abord éclairer les ruptures en jeu puis j'aborderai les potentialités et les leviers retenus dans les projets de programmes.

I.1. Le passage du calcul numérique au calcul algébrique : une révolution

A partir de cet énoncé, je vais mettre en évidence et illustrer des ruptures possibles provoquées *via* l'entrée par les équations.

<u>Enoncé</u> : Daniel rend visite à sa grand-mère qui lui donne 12,50 €. Il achète un pantalon de 32 €. Il lui reste 23 €. Combien avait-il avant de rendre visite à sa grand-mère ?

Ce problème peut être résolu avec une démarche arithmétique ou algébrique.

Résolution arithmétique	*Résolution algébrique*
23 +32 = 55 ; 55-12,5 = 42,5	Mise en équation : (x + 12,5) -32 = 23.
23+32 = 55-12,5 = 42,5 (écriture incorrecte)	

Les difficultés des élèves peuvent être liées, d'une part, à des fausses continuités, d'autre part à des discontinuités apparentes, à la fois dans les démarches de résolution que dans la mobilisation des notions et écritures mises en jeu dans la résolution.

a) Qu'en est-il des fausses continuités ?

Ce terme est à attribuer à une chercheuse québécoise C. Kieran[3], G. Vergnaud[4] parlant de ruptures d'ordre épistémologique. Les cadres numérique et algébrique partagent les mêmes symboles et signes (signes d'égalité et d'opérations) mais leur usage selon le contexte ne conduit pas à la même interprétation :

- Le statut du signe d'égalité a un double statut. Il peut désigner soit l'annonce d'un résultat, soit une relation d'équivalence. En arithmétique, le signe d'égalité est utilisé de façon dominante comme signe d'annonce de résultat (4 + 3 = 7) même si le signe = est vu comme relation d'équivalence (4 + 3 = 6 + 1). En revanche, quand on travaille sur les objets de l'algèbre, une grande partie des tâches repose sur des transformations d'égalités qui conservent la même valeur en faisant varier le sens des expressions : le signe d'égalité traduit alors nécessairement une relation d'équivalence.
- Les lettres désignent des quantités mais ont des statuts différents selon le contexte. Le fait de désigner une quantité par une lettre et d'engager cette lettre dans les calculs au même titre que les quantités connues accroît radicalement les potentialités et la puissance du calcul.

Ses fausses continuités sont sources de malentendus en classe et les enseignants ne les repèrent pas forcément. De plus, vu les difficultés engendrées par ces modifications, les élèves ne perçoivent pas l'accroissement des potentialités et de la puissance du calcul.

b) Qu'en est-il des discontinuités ?

Le passage du calcul numérique au calcul algébrique provoque aussi des discontinuités concernant à la fois les démarches et procédures de résolution que les objets et écritures

[3] C. Kieran
[4] G. Vergnaud

mobilisées. La méthode algébrique oblige les élèves à remettre en question et à modifier leurs stratégies de calcul :

- En arithmétique, on progresse du connu vers l'inconnu, en produisant pas à pas des résultats intermédiaires.
- En algèbre, dans la mise en équation, il s'agit d'établir une représentation formelle entre le connu (les données) et l'inconnue puis de calculer sur ces relations jusqu'à obtenir le résultat cherché.

c) Les nouveaux objets de l'algèbre

Le calcul littéral va mettre en jeu de nouveaux objets : formules, expressions littérales, équations, fonctions.

Le calcul littéral apporte une modification importante dans le rapport aux expressions : une expression numérique est presque systématiquement évaluée tandis qu'une expression littérale reste non évaluée et sa structure donne une information sur les opérations et les stratégies de calcul envisageables.

Au cours du collège, la résolution des équations va amener des techniques de résolution nouvelles qui remettent en question les démarches et habitudes précédentes. L'évolution des techniques de résolution des équations sont pointées dans les programmes de 6e, 5e, 4e :

- Pour les équations du type $a + x = b$; $ax = b$; $ax + b = c$ en 6e, 5e : technique « rechercher un nombre manquant dans une opération »,
- Pour les équations du type $ax+b = cx+d$ en 4e : technique algébrique « transformer des égalités en s'appuyant sur la compatibilité des opérations avec la conservation de l'égalité ».

De plus l'analyse des manuels met en évidence que bien souvent les problèmes ou équations retenus pour mobiliser les techniques algébriques ne sont pas adaptés car ils peuvent encore être résolus par des techniques arithmétiques via l'analyse / synthèse et la remontée des opérations. J'y reviendrai dans les paragraphes suivants. Il y a donc un renversement de pensée qui est souvent peu reconnu et peu pris en compte dans l'enseignement.

Les difficultés induites par les méthodes de calcul algébrique et les modes d'écriture (écriture parenthésée, conventions d'écriture, ..), qui ont mis beaucoup de temps à se stabiliser au cours de l'histoire et relèvent d'une rupture d'ordre épistémologique (Vergnaud 1987), on l'oublie trop souvent, n'amènent pas les élèves à percevoir l'accroissement des potentialités et de la puissance nouvelle du calcul algébrique.

I.2. Des difficultés liées à l'interprétation des expressions algébriques et à l'évolution des modes de contrôle

Les élèves ne sont pas immédiatement convaincus de la puissance que leur confère le calcul algébrique, parce qu'ils ne dominent ni les formes d'écriture, ni le calcul. En effet, les modes de contrôle de ce calcul algébrique sont aussi profondément modifiés.

- Le calcul arithmétique est piloté par le sens du contexte et les calculs y sont effectués en référence au contexte, toute expression numérique étant évaluée.

- Au contraire, le calcul algébrique ne fait plus référence au sens externe et le pilotage du calcul fait référence au sens interne des expressions et tire sa puissance de l'information monstrative contenue dans l'écriture des expressions

Prenons par exemple l'expression x^2-2x+1 + (2x-2)(x+3) à factoriser. Pour organiser et contrôler les calculs, ici la factorisation de cette expression, il s'agit de comprendre les règles syntaxiques qui organisent la formation et la transformation des expressions algébriques, de l'interpréter en liaison avec sa structure (somme de deux termes) et non pas une lecture de gauche à droite, de choisir l'écriture adaptée (son *sens*) en fonction du but visé (ici remplacer x^2- 2x+1 par (x-1)^2 et 2x-2 par 2(x-1)), de réaliser les transformations en conservant la *dénotation* de l'expression, c'est-à-dire sa valeur.

Les transformations s'appuient à la fois sur l'aspect syntaxique et sémantique des expressions, c'est-à-dire leur dénotation et leur sens, (Bedeuntung et Sinn pour Frege en 1900). À une expression sont associée plusieurs écritures de sens distincts sur lesquels on va s'appuyer pour choisir et organiser la stratégie du calcul. Ces concepts, qui associent à un nombre plusieurs écritures, ne peuvent s'appuyer que sur une expérience numérique développée au cycle 3 *via* le calcul réfléchi.

Le pilotage est lié à la reconnaissance de formes, par exemple, forme factorisée, forme développée, forme canonique.

On voit bien un travail analogue à celui qui est fait en géométrie : à une figure, ensemble de relations entre les objets qui la constituent, est associée une infinité de dessins sur lesquels on s'appuie pour développer des capacités de visualisation et un répertoire de formes. En effet, à une expression est associée un répertoire de formes qui prolonge le répertoire nécessaire à un calcul raisonné et indispensable à l'intelligence du calcul. Ce travail est un préalable au calcul intelligent

Ce travail est indispensable pour renforcer les rapports entre raisonnement et calcul et permettre un calcul intelligent qui prolonge le calcul réfléchi en s'appuyant sur ses propres modes de contrôle. C'est l'un des enjeux fondamentaux pour l'enseignement du calcul algébrique dans la scolarité obligatoire qui s'oppose à la vision du calcul algébrique comme calcul aveugle.

En voici un exemple en fin de l'enseignement secondaire : il s'agit de chercher « l'information monstrative » pertinente pour faire le choix d'une forme adaptée de l'expression $\frac{x^3+x^2-2x}{x^2-5x+6}$ en fonction du but visé :

- calcul de limite lorsque x tend vers 2^- ou 2^+ : $\dfrac{\frac{x^3+x^2-2x}{x-3}}{x-2}$
- recherche d'une asymptote au voisinage de l'infini : $x+6+\dfrac{22x-36}{x^2-5x+6}$
- calcul d'une primitive : $x+6+\dfrac{-8}{x-2}+\dfrac{30}{x-3}$

II.3. Des difficultés liées à deux conceptions des expressions algébriques

Deux aspects s'opposent pour interpréter une expression algébrique. D'abord, l'aspect procédural réfère à un processus de calcul pour substituer une valeur numérique à la variable.

Par exemple, l'expression x^2+2x+3 signifie « prendre le carré d'un nombre, lui ajouter le double de ce nombre et lui ajouter 3 ». D'autre part, l'aspect structural réfère à un objet, objet sur lequel on réalise des opérations. Par exemple, l'expression x^2+2x+3 correspond à un trinôme du second degré, objets que l'on peut additionner, multiplier, factoriser, dériver, etc. Dans ce cas, il est indispensable de travailler à partir de la structure de l'expression. Or l'opération qui organise la structure, ici l'addition, est la dernière à effectuer dans l'ordre des priorités opératoires.

Cet aspect est à la base de la reconnaissance d'une expression et des transformations, et donc d'un calcul intelligent. Pour A. Sfard, les élèves construisent d'abord une conception procédurale puis structurale d'un objet mathématique. Cet élément est pris en compte dans les projets dès la quatrième. Cet aspect est longuement développé dans le document d'accompagnement « Du numérique au littéral »[5].

II.4 Des difficultés liées à la dimension sémiotique du travail algébrique

Au-delà du travail sur les écritures algébriques, l'enseignement a pour enjeu d'amener les élèves à développer en parallèle d'autres représentations des expressions algébriques (schémas de calcul, programmes de calcul, figures géométriques). Il s'agit de la dimension sémiotique du travail algébrique (Duval, 1996) qui permet donc de travailler la formation, la transformation des écritures dans le registre des écritures algébriques et l'articulation des écritures algébriques avec d'autres registres sémiotiques (langage naturel, représentations graphiques, etc.).

La traduction algébrique d'énoncés en français nécessite souvent une reformulation pour faire apparaître les relations entre les nombres. Cette non prise en compte conduit à des erreurs fréquentes qui relèvent d'une traduction mot à mot sans reformulation. Par exemple, dans ce cas, l'énoncé « *il y a six fois plus d'étudiants que de professeurs. Utiliser E pour le nombre d'étudiants et P pour le nombre de professeurs* » a pour traduction incorrecte $6E = P$.

J'ai montré dans les paragraphes précédents des origines possibles des difficultés que rencontrent les élèves dans l'enseignement obligatoire.

En quoi les choix proposés par les projets de programmes peuvent-ils favoriser une plus grande progressivité des apprentissages ainsi qu'une négociation des ruptures à l'œuvre dans le passage arithmétique / algèbre ?

En quoi motivent-ils l'introduction des lettres et le calcul littéral ? En quoi permettent-ils de donner du sens aux expressions ?

III. D'autres entrées dans la pensée algébrique

Au-delà de l'entrée dans la pensée algébrique *via* les équations, des travaux de recherche et des stratégies d'enseignement développées dans les pays anglo-saxons (Bernarz, Kieran, Lee, 1996) prennent en compte d'autres perspectives d'introduction de l'algèbre. Ces perspectives s'appuient sur d'autres types de problèmes que les problèmes de mise en équation et les exercices de calcul littéral pour donner une visibilité à la question : le calcul littéral pour quoi faire ? La résolution de ces types de problèmes met en jeu la fonction généralisatrice du calcul algébrique et sa valeur d'outil de preuve. On retrouve aussi ces nouvelles perspectives d'introduction de l'algèbre en France, dans les travaux de Chevallard (1989), l'ouvrage *Les*

[5] http://eduscol.education.fr/D0015/du_numerique_au_litteral.pdf

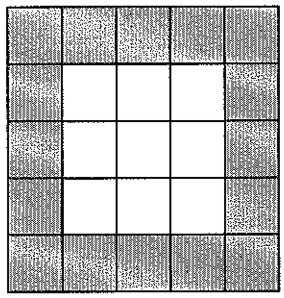
débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre ! de Combier, Guillaume, Pressiat (INRP 1996), les chapitres spécifiques sur l'introduction du calcul littéral et l'initiation au raisonnement du manuel Triangle (Ed. Hatier) de $5^{ième}$ et $4^{ième}$.

Illustrons ces types de problèmes, problèmes pré algébriques de généralisation, problèmes de preuve.

III.1. Des problèmes

<u>Problème 1</u> :"Carré bordé" (INRP 1996)

Situation : « Le problème vise à faire établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux hachurés d'une figure construite sur le modèle ci-dessous, quel que soit le nombre de carreaux sur le côté du carré. » (6e – 5e)



Cette situation a pour objectif principal d'amener les élèves à produire et à exploiter des formules qui expriment une procédure de calcul.

Pour permettre aux élèves de s'approprier la situation, la situation est présentée à partir de situations particulières, par exemple, border un carré de côté 3 carreaux unités et déterminer le nombre de carreaux sur la bordure. Et si le carré en avait 6, 32, 100 ? Dans une telle situation, les premiers calculs servent à donner du sens à la recherche, à disqualifier le comptage sur le dessin, et à susciter le besoin de définir des procédures de calcul

Toutefois, il est intéressant de remarquer que ce problème ne se réduit pas à l'écriture d'une formule déjà connue des élèves (aire ou périmètre par exemple). Cette activité conduit les élèves dans un véritable travail de recherche. En outre, le choix du support géométrique permet une validation des solutions par les élèves eux-mêmes.

Ce problème va également amener un travail sur l'articulation entre le langage naturel et le langage algébrique. On peut dans un premier temps demander aux élèves de décrire une méthode de calcul dans le langage naturel puis ensuite demander l'écriture d'une formule. L'équivalence des formules peut être testée numériquement ou justifier formellement.

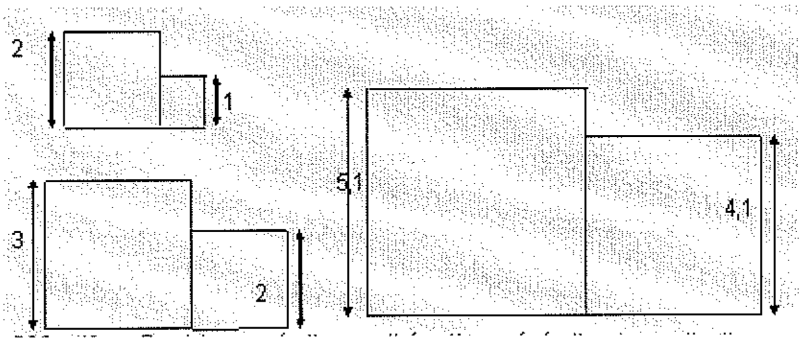
Au cours de cette activité, les élèves ne sont guidés ni dans le choix de la procédure de calcul, ni dans le choix des lettres à utiliser. Il est donc possible d'envisager une certaine variété dans les formules produites par les élèves. Cette variété permettra de travailler sur la non-unicité du choix des lettres et sur la non unicité des formules produites pour un même choix de lettre, les règles d'écriture mathématique (parenthésage, priorité des opérations, ...) et les implicites liées aux écritures

On pourra toutefois montrer aux élèves que même si des formules semblent différentes, elles sont équivalentes (lorsqu'on remplace dans chacune d'elles les lettres par un même nombre, on obtient toujours le même résultat). Après, la formule est exploitée pour calculer d'autres valeurs particulières (substitution)

Avec une telle activité, il est également envisageable de travailler sur les règles de syntaxe des expressions algébriques, aussi bien au niveau de la formation des écritures algébriques (sixième, cinquième) qu'au niveau de leur traitement (quatrième). On peut également traiter le problème de l'inversion d'une formule (quatrième).

Problème 2 : Situation

Établir une formule qui permette de calculer le périmètre d'une figure construite sur le modèle ci-dessous (5e-4e)



Ce problème a pour objectif de faire produire une écriture mathématique généralisant une situation géométrique. Il amène les élèves à établir différentes méthodes de calcul numérique, à les formuler en français. C'est l'occasion pour eux de donner du sens à l'utilisation d'une lettre et à la nécessité de son usage, à valider les écritures, à établir leur équivalence.

Un scénario est proposé dans le livre de **G Combier, J.C, Guillaume et A Pressiat *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre* édité en 1996 à l'INRP dans la collection Didactique des Disciplines, Paris.**

Examinons maintenant les problèmes 3 et 4

Problème 3 : *Un enfant est sûr de lui en réalisant le calcul suivant. Il dit à un copain :*

« Tu penses à un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplie le résultat par 3, tu retranches 4, tu ajoutes ton nombre, tu divises le résultat par 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre : tu as trouvé 7 ». L'affirmation est-elle vraie ? Justifiez votre réponse (en 5e-4e).

Problème 4 : *Vrai ou faux ? La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 3* (en 4e-3e).

Ces problèmes ont pour objectif principal d'amener les élèves à émettre des conjectures à partir d'exemples numériques, puis à généraliser et produire une expression algébrique pour prouver une propriété numérique. Le problème 4 permet aussi de réfléchir au choix de la variable pour obtenir un calcul plus économique.

III.2 Des fonctions du calcul algébrique pour favoriser l'entrée dans la rationalité mathématique

Que nous apprennent l'analyse de ces problèmes ? Deux fonctions du calcul algébrique y sont mises en jeu : la fonction généralisatrice, la fonction de preuve.

a) Fonction généralisatrice du calcul algébrique

Le nouvel espace ouvert par la rénovation des programmes permet de mettre en œuvre la fonction généralisatrice du calcul algébrique. Son rôle était mineur dans les anciens programmes du collège alors que le calcul algébrique vit dans les lycées professionnels essentiellement *via* l'usage des formules. Cette perspective permet :

- une entrée précoce dans le calcul littéral à partir de problèmes pré algébriques pour produire et exploiter des formules dans des contextes divers (grandeurs,..) ou dans des domaines d'emploi divers ;
- de penser la lettre comme représentant d'un nombre quelconque, engagée dans les calculs au même titre que les nombres qu'elle représente et non plus seulement comme étiquette. La lettre intervient comme nombre généralisé, préconcept de la notion de variable qui sera introduit en 3e ;
- d'articuler le numérique et l'algébrique en montrant les limites du numérique (substituer une lettre par un nombre pour exploiter la formule, tester la validité d'une formule) ;
- de travailler les règles de syntaxe des écritures algébriques, aussi bien au niveau de leur formation (sixième, cinquième) qu'au niveau de leur traitement (quatrième) ;
- d'aborder la question de l'équivalence des formules et de motiver l'introduction du calcul littéral
- de se familiariser de façon précoce avec la notion de fonction et de variable.

b) Fonction de preuve

Le calcul algébrique comme outil de preuve permet d'aborder la question de l'infinité des cas possibles et l'insuffisance des exemples numériques pour prouver. C'est l'occasion pour les élèves d'articuler les cadres numérique et algébrique et de rencontrer l'insuffisance du numérique pour démontrer. Le problème ci-dessous donné dans l'évaluation nationale de seconde de 2001 visait déjà à tester si les élèves mobilisaient le calcul algébrique pour démontrer une propriété numérique.

On travaille sur les nombres entiers positifs, et l'on considère le programme de calcul présenté ci-dessous

Choisir un nombre entier positif
Multiplier par 2
Ajouter 1
Elever au carré
Soustraire 1
Multiplier par 3
Résultat du programme de calcul

I) 1. Compléter les deux schémas

2. Vérifier que le résultat du programme de calcul peut s'exprimer en fonction du nombre choisi n par $12n^2 + 12n$

II) 1. (..)

2. a) Démontrer que le résultat $12n^2 + 12n$ est toujours un multiple de 4

b) Démontrer que le résultat $12n^2 + 12n$ est toujours un multiple de n

c) Démontrer que le résultat $12n^2 + 12n$ est toujours un multiple de 12n et de (n+1)

Ces problèmes motivent un calcul algébrique « intelligent » pour transformer des expressions et trouver des écritures adaptées afin de prouver les assertions attendues. Y. Chevallard donnait déjà l'exemple suivant en 1989 :

> *On prouve à l'aide des expressions 4p et (p+1)2 - (p-1)2 que la somme de deux nombres consécutifs impairs est d'une part, un multiple de 4 ((2p+1) + (2p-1) = 4p) et d'autre part une différence de deux carrés ((p+1)2 - (p-1)2 = 4p)* (Chevallard 89)

Ces propositions illustrent des perspectives complémentaires de l'approche en termes d'équations et d'inéquations qui peuvent s'avérer moins « déstabilisante » et plus productrice de sens pour les élèves. De plus, ces perspectives contiennent en germe l'approche du calcul fonctionnel. Pour conclure, je reprendrai deux passages de Y. Chevallard :

« Le calcul algébrique naît du travail de modélisation et d'étude des propriétés de systèmes étudiés (nombres entiers, ..) et acquiert du sens dans ses rapports avec le réel. »

« La fonctionnalité du calcul algébrique (...) suppose ainsi précocement l'emploi de paramètres, suscite la réappropriation de la notion de formule (en mettant en avant autant sa production que leur mise en œuvre) et conduit à envisager la familiarisation, précoce tout autant, avec la notion de fonction » (Chevallard, Pt x n°19, 1990)

III.3 Sélectionner des problèmes dont la structure nécessite une mise en équation pour les résoudre (Gascon 1994)

Le choix des problèmes adaptés à un apprentissage visé est un geste professionnel essentiel pour l'enseignant. Or l'analyse des manuels met en évidence que de nombreux problèmes, retenus pour introduire la lettre comme inconnue et pour mobiliser l'outil algébrique pour mettre en équation des situations, peuvent être résolus par une démarche arithmétique. Comment engager alors les élèves à abandonner une stratégie de résolution qui s'avère toujours pertinente et plus économique pour résoudre ces problèmes ?

Examinons ces deux problèmes :

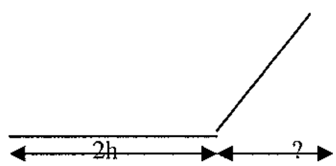
***Problème 1 :** Un homme met 5 heures et demie pour faire un trajet de 32 km. Il commence par marcher sur un terrain plat puis il monte une pente à la vitesse de 4 km/h. Il fait alors demi-tour et retourne au point de départ par le même chemin qu'à l'aller. Nous savons qu'il a marché pendant 4 heures (2 à l'aller et 2 au retour) sur le terrain plat et que la montée de la pente lui prend le double de temps que la descente. Calculer la longueur de la partie plate du trajet*

***Problème 2 :** Un homme met 5 heures et demie pour faire un certain trajet. Il commence par marcher sur un terrain plat à la vitesse de 6 km/h et continue en montant une pente à la vitesse de 4 km/h. Il fait alors demi-tour et arrive au point de départ en faisant le même parcours qu'à l'aller. Nous savons que la vitesse de descente de la pente est de 8 km/h et que la longueur du chemin de la pente est les 2/7 du parcours total. Calculer la longueur de la partie plate du trajet.*

Le problème 2 est un problème "isomorphe" au problème 1, c'est-à-dire qu'on l'obtient en permutant dans l'énoncé original certaines grandeurs données par des inconnues, sans changer la structure profonde du problème, c'est-à-dire, la symbolisation globale des conditions du problème. Cette modification entraîne des conséquences majeures : la stratégie arithmétique adaptée pour résoudre le problème 1 s'avère insuffisante pour résoudre le problème 2.

En effet, si dans l'analyse du problème nous désignons :

E4 : Longueur de la partie plate du trajet (inconnue)
E3 : Longueur de la pente
E2 : Durée de la montée de la pente
E1 : Durée de la montée et de la descente de la pente
E0 : Durée du parcours de la partie plate (Donnée)



Par une démarche arithmétique et un calcul de proche en proche, en partant de la donnée, il est possible de calculer la longueur de la partie plate :

$$\mathbf{E0} \xrightarrow[\mathbf{T1}]{} \mathbf{E1} \xrightarrow[\mathbf{T2}]{} \mathbf{E2} \xrightarrow[\mathbf{T3}]{} \mathbf{E3} \xrightarrow[\mathbf{T4}]{} \mathbf{E4}$$

T1 : Calcul de la durée de la montée et de la descente (soustraire 4h des 5h30)
T2 : Calcul de la durée de la montée (Prendre les 2/3 de 1h30)
T3 : Calcul de la longueur de la pente (Multiplier la durée par la vitesse à la montée)
T4 : Calcul de la longueur de la partie plate du trajet (soustraire à 32km les 8km de pente et diviser par

Ce n'est plus le cas pour le problème 2. En effet, il n'est plus possible de calculer des résultats intermédiaires calculables. Il est nécessaire de passer par une analyse auxiliaire pour exprimer une grandeur T, la durée du parcours sur terrain plat, de deux façons différentes et de traduire algébriquement le problème à partir du choix d'une inconnue

En : Longueur du parcours : x

En-1 : Longueur de la pente : $y = (2/7)x$

En-2 : Durée de la montée : $m = y/4$

En-3 : Durée de la montée et de la descente : $M = m + m/2 = y/4 + y/8$

En-4 : Durée du parcours sur terrain plat : $T = 5{,}5 - M = 5{,}5 - (y/4 + y/8)$ *soit* $T = 5{,}5 - \frac{3}{28}x$

En-5 : Longueur du parcours sur terrain plat : $L = x - 2y$

En-6 : **Durée du parcours sur terrain plat :** $T = (x - 2y)/6$ *soit* $T = (x - \frac{4}{7})/6$

Il s'agit donc de *déterminer y tel que* $5{,}5 - \frac{3}{28}x = (x - \frac{4}{7})/6$

En conclusion, le choix de la structure du problème est déterminant pour amener les élèves à comprendre l'insuffisance de la démarche arithmétique pour résoudre un problème. Les problèmes conduisant à une mise en équation du type $ax+b = cx+d$ sont pertinents pour cette introduction.

III.3 Les différents aspects de la compétence algébrique

Pour conclure ce paragraphe, je propose de définir les différents aspects de la compétence algébrique. Les connaissances algébriques sont structurées autour de ses emplois à résoudre des problèmes et à calculer.

La compétence algébrique s'évalue, d'une part du côté *outil de résolution* à travers la capacité, à produire des expressions et des relations algébriques pour traduire des problèmes dans des contextes variés (généralisation, preuve, résolution via équations et inéquations), à les interpréter, puis à mobiliser les outils algébriques adaptés à leur résolution.

La compétence algébrique s'évalue, d'autre part du côté *calcul,* à travers la capacité à développer des techniques d'ordre syntaxique et sémantique pour mener un calcul intelligent et le contrôler à partir du sens interne des expressions.

Il s'agit aussi d'évaluer les capacités des élèves à négocier la rupture épistémologique avec les démarches arithmétiques, à interpréter des expressions algébriques à la fois au niveau opérationnel et structural pour en faire des usages variés, à construire le lien incontournable entre compétence algébrique et rationalité algébrique.

IV. Des pistes pour une progressivité dans l'apprentissage du calcul littéral de la sixième à la seconde

IV.1. Différentes perspectives d'introduction du calcul littéral

L'éclairage des programmes et projets de programmes à partir des résultats et des stratégies mises en place dans les pays anglo-saxons met en évidence plusieurs perspectives d'introduction du calcul littéral :

- *une perspective « généralisation preuve »* : cette perspective vise à engager les élèves dans l'utilisation des lettres et du symbolisme pour généraliser et prouver des propriétés numériques ou des « patrons géométriques », pour construire la rationalité algébrique. Ici, les lettres apparaissent avec le statut de nombres généralisés comme préconcepts des variables.
- *une perspective « équation »* : cette perspective vise à engager les élèves à mobiliser l'algèbre comme outil de résolution de problèmes *via* la mise en équation et leur résolution. Ici, les lettres apparaissent avec le statut d'inconnue. Le travail proposé permet une

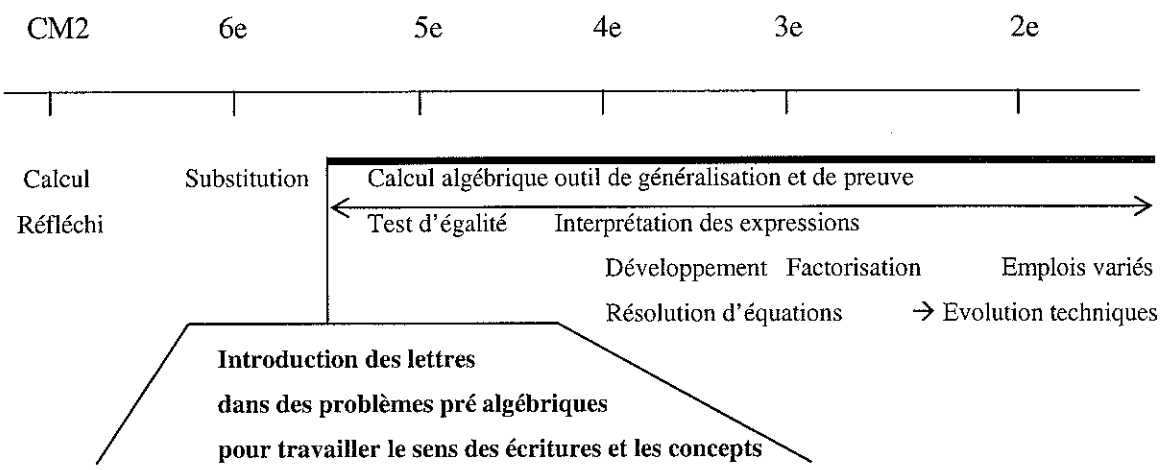
négociation de la transition entre l'arithmétique et l'algèbre à condition que les enseignants choisissent des problèmes qui nécessitent un raisonnement algébrique en rupture avec ceux qui permettent une démarche arithmétique.

- *une perspective « modélisation formule »* : cette perspective vise à engager les élèves *à produire* des formules dans des situations réelles (physique,...) voire à donner du sens aux expressions littérales. Ici, les lettres apparaissent avec le statut de variable dans un contexte de grandeur. Cette approche permet aussi d'articuler différents modes de représentation (tableau de valeurs, représentation graphique, langage naturel, écritures symboliques).
- *une perspective « fonctionnelle et technologique »* : cette perspective amène les élèves à explorer des relations fonctionnelles relatives à des situations « réelles » dans un environnement informatique. Ici, les lettres apparaissent avec le statut de variable préalablement à celui d'inconnue. Il s'agit aussi d'amener les élèves à acquérir une certaine flexibilité entre différents modes de représentation : tableau de nombres, représentation graphique, symbolisme algébrique (dans un environnement informatique).

Les diverses expériences menées en France et dans les pays anglo-saxons montrent la nécessité d'une complémentarité des approches pour développer une nécessaire flexibilité et adaptabilité dans l'interprétation des lettres et des expressions afin de favoriser chez les élèves la capacité d'en faire des usages variés.

Cette complémentarité des entrées permet d'introduire le calcul littéral avec une réelle fonctionnalité qui rompt avec les pratiques précédentes (règles admises et appliquées sans finalités), en articulant raisonnement et calcul, en donnant du sens aux écritures algébriques définies. De plus, l'élargissement des emplois du calcul algébrique permet d'étaler les apprentissages dans le temps. Les expérimentations menées par les collègues enseignants avec qui je travaille indiquent qu'au début, ils perdent un peu de temps mais que ce travail approfondi du sens et du raisonnement permet un gain réel de temps et favorise le sens du calcul algébrique.

Le diagramme ci-dessous illustre la progressivité de l'apprentissage du calcul littéral de la sixième à la seconde.



IV.2 Des choix pour permettre la progressivité des apprentissages

Au-delà de l'introduction assez précoce du calcul algébrique, il s'agit pour le professeur de faire des choix qui favorisent la progressivité des apprentissages :

1. Prendre appui sur une pratique régulière du calcul réfléchi en cycle 3 et au début du collège : cette étape s'avère indispensable pour travailler le statut du signe d'égalité comme relation d'équivalence, les propriétés des nombres entiers, les diverses écritures d'un nombre. Sans cet appui, il est plus difficile d'installer un calcul algébrique intelligent qui repose sur le choix d'écritures adaptées d'une expression en fonction du but visé.
2. Introduire le calcul littéral à partir de problèmes accessibles et significatifs pour les élèves (Cf. III)
3. Proposer régulièrement des problèmes « adaptés » pour motiver les emplois de l'outil algébrique : produire des formules, démontrer des propriétés, calculer en recherchant des écritures appropriées, mettre en équation et résoudre,
4. Proposer des problèmes pour travailler la technique et l'aspect structural des expressions en n'oubliant pas le travail technique avec des logiciels, en particulier, Aplusix.

IV.3. Introduire le calcul littéral à partir de problèmes accessibles et significatifs pour les élèves

a) *Des conditions pour les situations problèmes*

L'introduction du programme de sixième précise les conditions que doivent remplir les problèmes pour favoriser l'apprentissage et donner du sens aux nouveaux concepts abordés.

« *Les activités choisies doivent :*
- *Permettre un démarrage possible pour tous les élèves, donc ne reposer que sur des consignes simples et n'exiger, au départ, que des connaissances solidement acquises ;*
- *Créer rapidement une situation assez riche pour provoquer des conjectures ;*
- *Rendre possible la mise en jeu des notions dont l'apprentissage est visé ;*
- *Fournir aux élèves, aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats, tout en favorisant un nouvel enrichissement ; on y parvient, par exemple, en prévoyant divers cheminements qui permettent de fructueuses comparaisons.* »

b) Des conditions sur les modalités de travail

Au-delà du choix des problèmes, il s'agit pour le professeur d'organiser des modalités de travail dans le but de favoriser l'activité potentielle des élèves et de structurer l'apprentissage visé. Nous retenons les principales phases suivantes qui organisent une séance :
- Une phase d'appropriation pour permettre aux élèves la dévolution du problème,
- Une phase de recherche, individuelle ou en groupes, pour engager les élèves à trouver des procédures personnelles de résolution du problème,
- Une phase de mise en commun où l'enseignant organise la formulation des productions et organise leur validation à partir d'un débat mathématique dans la classe,
- Une phase de synthèse où l'enseignant peut institutionnaliser les nouveaux savoirs visés par le problème et à retenir.

Ces choix sont illustrés dans les exemples de situations proposés dans ce document.

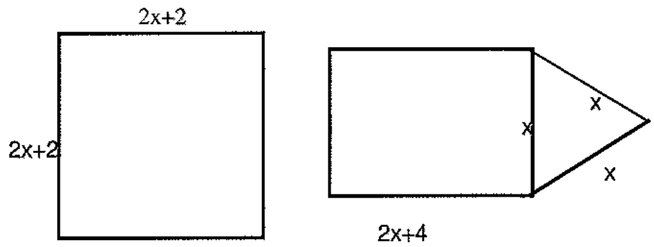
IV.3 Proposer régulièrement des problèmes « adaptés » pour motiver les emplois de l'outil algébrique

Avant de conclure, je voudrai illustrer différents emplois du calcul littéral à partir des problèmes ci-dessous :

a) Problèmes pour démontrer

Énoncé 1 :

Les deux figures ont-elles le même périmètre ?



Enoncé 2

A = $3x+2(x+6)+8$ B = $5x+20$

Calculer A et B pour $x = -3$, $x = 1$, $x = 2$. Que conjecture –t-on ? Justifier le.

Énoncé 3 :

Choisir un nombre

Programme 1 : multiplier ce nombre par 4 ; ajouter 3 au produit obtenu

Programme 2 : multiplier ce nombre par 7

Programme 3 : multiplier ce nombre par 4 ; ajouter au produit obtenu le triple du nombre choisi.

Ces trois programmes donnent-ils tous le même résultat ?

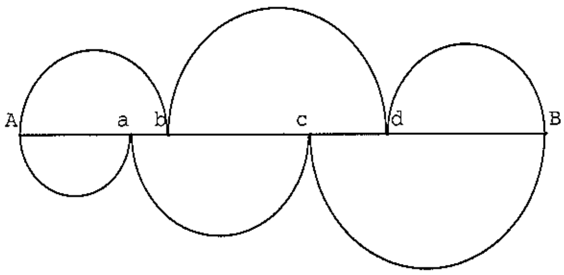
Écrire l'expression littérale correspondant à chacun de ces trois programmes.

On peut avec ces trois expressions écrire une égalité toujours vraie. Laquelle ? La justifier.

On peut avec ces trois expressions écrire deux égalités qui ne seront vraies que pour une valeur bien choisie de la lettre. Écris ces deux égalités et trouve cette valeur particulière de la lettre.

Énoncé 4 : Deux nombres ont pour somme 300. De combien augmente leur produit si l'on augmente chacun d'eux de 7 ?

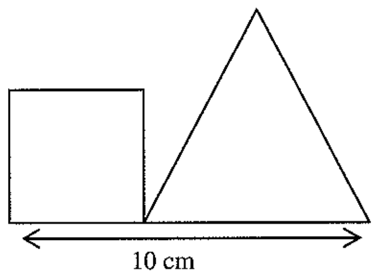
Énoncé 5 :
Pour aller de A à B, on peut suivre le segment [AB] ou passer par les demi-cercles de diamètres indiqués sur la figure. Lequel des trois chemins est le plus long ? Et si on change la position des points a, b, c et d ?



b) Problèmes pour mettre en équation

Enoncé 6

Quelle valeur faut-il donner
au côté du carré pour qu'il ait
le même périmètre que le triangle ?



V. Conclusion

J'ai tenté dans cette présentation de convaincre les enseignants que la complémentarité des stratégies d'introduction des lettres et du calcul littéral peut faciliter la négociation des ruptures en jeu dans cet apprentissage et amener les élèves à donner davantage de sens au calcul algébrique. Cette approche permet de penser la progressivité dans l'apprentissage du calcul littéral qui doit s'appuyer sur le développement préalable du calcul réfléchi et un renforcement des rapports entre raisonnement et calcul. L'approche retenue renvoie aussi à un calcul algébrique intelligent

L'élargissement des emplois du calcul algébrique *via* la production de formule, la preuve, permet de donner sa juste place au calcul algébrique dans l'entrée dans la rationalité mathématique afin de se construire comme futur outil d'étude du fonctionnel.

Annexe : résultats de l'expérimentation

Exercice n°1
Bruno achète 3 CD à 12€ l'un et 2 BD à 8€ l'une. Il a 60€ dans son porte-monnaie. Combien lui reste-t-il ?
objectifs : utilisation du signe =
écriture du calcul en une seule expression (procédure experte de 5e)

	L'élève a posé au moins une opération en colonnes	L'élève a écrit une ligne pour chaque calcul.	l'élève a écrit une seule expression	L'élève a écrit des égalités fausses *	dont erreurs de raisonnement	dont erreurs de calculs.	total
CE1	5 63%	1 13%	1 13%	1 13%	2	7 88%	8
CE2	19 90%	2 10%	0 0%	0 0%	4	5 24%	21
CM1	15 83%	1 6%	1 6%	1 6%	5	5 28%	18
CM2	17 77%	3 14%	0 0%	2 9%	3	4 18%	22
6ème	73 83%	14 16%	1 1%	0 0%	13	7 8%	88
5ème	34 50%	26 38%	8 12%	0 0%	3	8 12%	68
4ème	13 29%	30 67%	1 2%	1 2%	1	5 11%	45
3ème	1 3%	30 97%	0 0%	0 0%	0	0 0%	31

* Egalités fausses : On peut trouver des écritures du types : 3 x 12 = 36 + 2 x 8 = 36 + 16 = 52 - 60 = 8 (???)

** Voici les écritures obtenues [(3x12)+(2x8)]-60=8 ou
60-3x12-2x8=8 3x12+2x8-60=8 60-(3x12)+(2x8)

<u>(a) on constate des ébauches de calculs enchaînés : 3x12+2x8 = 52 ou 60 - (36+16)=8</u>
12 sur 30 en 4ième et 5 sur 30 en 3ième

<u>Exercice n°2</u> **: Soit le nombre 5. Ajoute 6 à ce nombre. Multiplie le résultat par 2. Quel nombre obtient-on ? Écris tes calculs.**

	L'élève a posé au moins une opération en colonnes	Calculs en lignes. 5+6=11 et 11x2=22.	1 seule expression (5+6)x2=22	1 seule expression 5+6x2=22	égalité fausse 5+6=11x2=22	autres écritures…	l'écriture ne correspond pas aux nombres donnés
CE1	5 22%	1 4%	1 4%	1 4%	2 9%	7 30%	6 26%
CE2	19 58%	2 6%	0 0%	0 0%	4 12%	5 15%	3 9%
CM1	15 48%	1 3%	1 3%	1 3%	5 16%	5 16%	3 10%

CM2	17 53%	3 9%	0 0%	2 6%	3 9%	4 13%	3 9%
6ème	39 44%	24 27%	2 2%	2 2%	12 13%	9 10%	1 1%
5ème	16 24%	25 37%	11 16%	3 4%	10 15%	3 4%	0 0%
4ème	4 4%	62 58%	21 20%	8 7%	10 9%	2 2%	0 0%
3ème	0 0%	20 65%	2 6%	1 3%	8 26%	0 0%	0 0%

(*) Cet élève a écrit : 5+6x2= 5+12 =17

Synthèses des réponses pour les exercices 1 et 2 :

Ces exercices ont été testés en février. La partie du programme de 5^{ième} relative aux « conventions de priorité entre opérations » avait été traitée.

Remarque sur les effectifs. Ils ne sont pas significatifs en particulier en primaire et 3^{ième}.

➢ Premier constat. Une grande majorité des élèves trouvent les bons résultats.

	6^{ième}	5ième
Exercice 1	75% *(+ 8% erreurs de calculs)*	84% *(+ 13% erreurs de calculs)*
Exercice 2	84% *(+ 1% erreurs de calculs)*	93% *(+ 1% erreurs de calculs)*

➢ Deuxième constat

Pour ces deux exercices, les élèves utilisent minoritairement une seule expression.

Ce constat, en particulier pour l'exercice 1, peut être confronté aux résultats obtenus à l'exercice 9 de l'évaluation nationale 5^{ième} de septembre 2002.

« Simon entre dans une boulangerie.
Il achète deux croissants à 0,6€ l'un et trois pains au chocolat à 0,7€ l'un.
Il paye avec un billet de dix euros.

Écris, à l'aide d'une seule expression, les calculs qui permettent de trouver la somme qui lui est rendue.
On ne demande pas d'effectuer les calculs. »

12,4% de réponses correctes,
10,3% pour une différence mal formulée 2×0,6+3×0,7-10
10% pour 10-(2×0,6)+(3×0,7) ou 10-2×0,6+3×0,7
12,3% pour 2×0,6+3×0,7
47,6% pour une autre réponse et 7,4% pour une absence de réponse.

Dans « autres réponses » on peut penser que l'on doit trouver en nombre non négligeable la réponse au problème (6,7€) et cela malgré la consigne *« On ne demande pas d'effectuer les calculs. »*. C'était le cas pour mes élèves.

Cette partie de la consigne n'étant naturellement pas présente dans nos deux exercices, il semble normal que peu d'élèves aient utilisé une seule expression pour trouver leur résultat.

Pour les élèves que je connais, ceux qui ont utilisés une seule expression peuvent être regroupés en 2 catégories :
Les « scolaires » ayant de très bons résultats. (Parmi ceux-ci on trouve aussi ceux qui écrivent une ligne par calcul en précisant en français à quoi correspond chaque étape de leur calcul.)

Les élèves peu « scolaires » mais ayant des facilités en math et qui apprécient l'efficacité et les raccourcis. Parmi ceux-ci on trouve aussi ceux qui écrivent des égalités fausses comme « 5+6=11×2=22 ».

Les commentaires joints à l'évaluation nationale précise :
« La tache demandée à l'élève est complexe. Elle nécessite
- *de comprendre l'énoncé*
- *d'organiser les informations*
- *d'élaborer une démarche de résolution*
- *d'écrire un seul calcul avec parenthèses pour résoudre le problème »*

Pour l'exercice1, et dans une moindre mesure pour l'ex 2, seuls les trois premiers points sont mis en œuvre par nos élèves (et cela leur suffit pour avoir un résultat juste).

➢ Troisième constat.
Ce constat concerne les élèves qui n'ont pas écrit une seule expression.

Les élèves posent majoritairement des opérations jusqu'en 6ième.
En 5ième, ils sont encore majoritaires dans ce cas pour l'exercice 1 mais pas pour l'exercice 2.
De manière générale on « pose » davantage pour l'exercice 1.
J'y vois deux explications. L'exercice 1 est un problème à résoudre et les données numériques sont plus difficiles à gérer mentalement (en particulier le 36+16).
En 4ième et 3ième il n'y a pratiquement plus d'opérations posées. De plus des ébauches de calculs enchaînés apparaissent davantage : 3x12+2x8 = 52 ou 60 - (36+16)=8.

Autre remarque :
Un seul élève a donné la réponse « Il lui reste 8€ » sans aucun calcul écrit.

<u>Pour l'exercice 3</u>, Je n'ai pas assez d'information *(18% de mes élèves n'ont pas compris et n'ont rien fait)* et nous n'avons pas donné le même énoncé. Pour ma part j'avais donné juste une phrase *(Trouvez deux nombres tels que leur somme soit égale à 49 et leur différence soit égale à 3).*

Juste une surprise pour moi, pour environ 12% des élèves que j'ai testés, la moitié de 49 apparaît au début de leur démarche personnelle. L'utilisation de la différence 3 est ensuite plus délicate.
Peut-être que si l'arithmétique était aussi davantage ou autrement travaillée…

RESSOURCES

Les programmes et documents d'accompagnement

Mathématiques : les programmes du cycle 3
http://www.cndp.fr/secondaire/mathematiques/

Documents d'accompagnement : le calcul mental
http://eduscol.education.fr/D0048/primacc.htm ou
http://eduscol.education.fr/D0048/calcul_mental.pdf

Mathématiques : Introduction pour le cycle central
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs5/annexe2_1.pdf

Mathématiques : programme de cinquième
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs5/annexe2_2.pdf

Mathématiques : programme de quatrième
ftp://trf.education.gouv.fr/pub/edutel/bo/2005/hs5/annexe2_3.pdf

Mathématiques : document d'accompagnement « Du numérique au littéral »
http://eduscol.education.fr/D0015/du_numerique_au_litteral.pdf

Bibliographie

Algèbre et fonctions, Groupement National d'équipes de recherches en Didactique des mathématiques, publié par la DES en Juin 2000, Bureau de la valorisation des innovations pédagogiques, Ministère de l'éducation Nationale et de la Recherche.

Booth L. (1985) : Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x,* n° 5, pp 5-17.

Chevallard Y. (1984) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x* n°5, 51-95, IREM de Grenoble.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique. Perspectives curriculaires - la notion de modélisation. *Petit x* n°19, 43-72, IREM de Grenoble.

Chevallard Y. (1990) Le passage de l'arithmétique à l'algébrique. Voies d'attaque et problèmes didactiques. *Petit x* n°23, 5-38, IREM de Grenoble.

Chevallard Y (1995), Les outils sémiotiques du travail mathématique, Petit x, n°42, pp. IREM de Grenoble.

Combier G., Guillaume J.C., Pressiat A. (1995) *Calcul littéral. Savoir des élèves de collège* (dir. J. Colomb) INRP, Paris, Documents et travaux de recherches en éducation, 4.

Combier G, Guillaume J.C, Pressiat A (1996) *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre*, INRP, Didactique des Disciplines, Paris.

Coulange L (1997-1998), Les problèmes « concrets à mettre en équation » dans l'enseignement, *Petit x*, n°47, pp.33-58.

Dahan-Dalmedico A. et Peiffer J. (1986) *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales.* Seuil, Points sciences. Ch 3 La constitution de l'algèbre classique, 72-119 et ch. 8 Nouveaux objets. Nouvelles lois. L'émergence des structures algébriques, 263-298.

Duperret J.C., Fenice.J.C., L'accès au littéral et à l'algébrique, un enjeu au collège, Repères IREM n°34, janvier 1999.

Grugeon B (2000), Une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire : Conception, exploitation et perspectives, in *Actes des journées de formation de formateurs, Boisseron,* Publication de l'IREM, Université Montpellier II, 4-5 juin 1999

IREM de Poitiers (2000), Calcul littéral au collège

IREM de Strasbourg (équipe de ler cycle) (1992) Calcul numérique et calcul algébrique au collège : quelles difficultés ? *Des chiffres et des lettres au collège,* 147-188, Bulletin inter-IREM premier cycle.

Sackur C, Drouhard JP, Maurel M, Pécal M (1997), Comment recueillir des connaissances cachées en algèbre et qu'en faire ?, *Repères*, n°28

Notre site WEB

http://iremp7.math.jussieu.fr

IREM Université Paris7
Case 7018
2 Place Jussieu
75251 Paris cedex 05

TITRE :

Le calcul algébrique : pistes pour une progressivité des apprentissages de l'école au lycée

AUTEUR (S) :

Groupe d'enseignants de l'Académie d'Amiens, coordonné par Brigitte Grugeon-Allys
Département de Mathématiques de l'IUFM d'Amiens, Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques

RESUME :

Ce document est le fruit de deux années de années de travail d'un groupe de professeurs et de formateurs de l'académie d'Amiens intervenant dans le premier et le second degré. Ils sont partis d'un constat commun : les compétences des élèves en calcul algébrique ne sont pas satisfaisantes et la remédiation souvent inefficace. Cette brochure permet de dresser un état des lieux, de l'école à la fin du lycée, pour repérer les besoins puis propose quelques exemples d'activités exploitables dans les classes et déjà testées

MOTS CLES :

Calcul algébrique, activités en classe, école, collège, lycée

Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
Publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 2006
ISBN : 2-86612-278-X