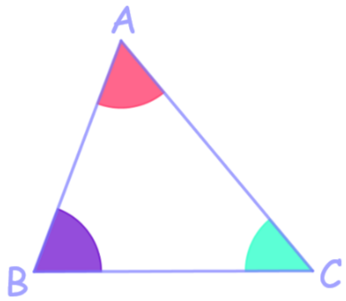
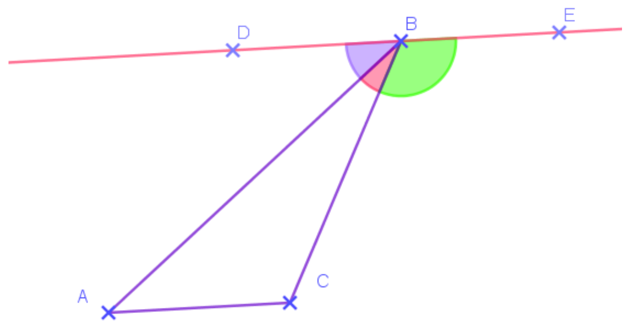
Triangles et angles



Propriété 1 : La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

$$\widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{ACB} = 180°$$

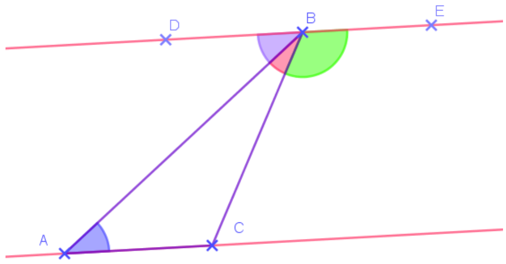
Activité découverte dans le Genially

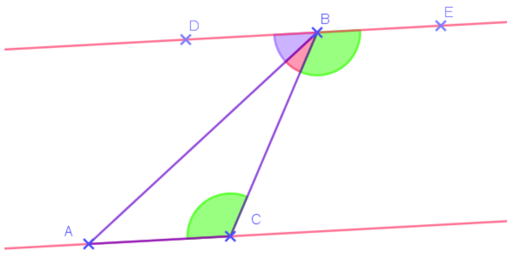


Démonstration

Soit ABC un triangle. Traçons la parallèle à la droite (AC) passant par le sommet B.
Plaçons D et E sur cette droite de part et d'autre de B (on désignera par D celui des deux points tel que les angles $\widehat{DBA}$ et $\widehat{BAC}$ soient alternes-internes).
D, B et E étant alignés, $\widehat{DBE}$ est un angle plat, il mesure 180°. Donc :
$\widehat{DBA} + \widehat{ABC} + \widehat{CBE} = 180°$ (1)

Les droites (DB) et (AC) sont deux parallèles coupées par la sécante (AB) : les angles alternes-internes sont donc de même mesure. On a donc :
$\widehat{DBA} = \widehat{BAC}$



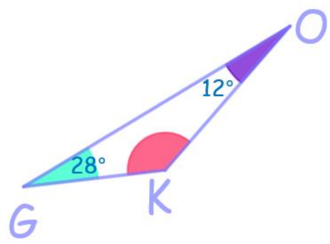


Les droites (DB) et (AC) sont deux parallèles coupées par la sécante (CB) : les angles alternes-internes sont donc de même mesure. On a donc :
$\widehat{ACB} = \widehat{CBE}$

En utilisant ces deux égalités de mesures d'angles et l'égalité 1, on obtient :

$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$
Autrement dit, la somme des mesures des 3 triangles du triangle ABC est égale à 180°.

Application : Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{OKG}$?



On peut rapidement retrouver la mesure de l'angle en effectuant la somme des deux mesures données :

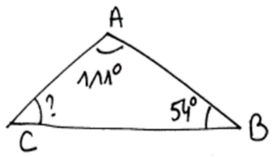
$$28° + 12° \; = \; 40°$$

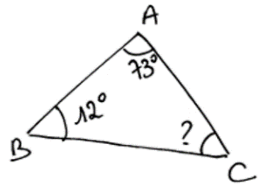
Et en utilisant la propriété : la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.
Pour trouver la mesure de l'angle manquant on effectue la différence entre 180° et la somme que l'on vient de calculer.

$$180° \; - \; 40° \; = \; 140°$$

L'angle $\widehat{GKO}$ mesure donc 140°.

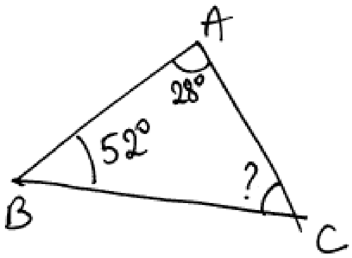
Exercice : Calcule l'angle manquant dans chaque cas





Questions flash :

Intéressons-nous maintenant à la rédaction : l'application telle qu'elle est rédigée, est assez longue. On peut alléger la rédaction, en utilisant les noms des angles. Voici les étapes importantes de la rédaction :

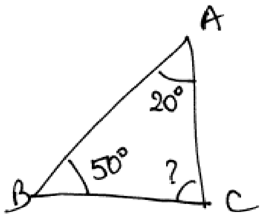


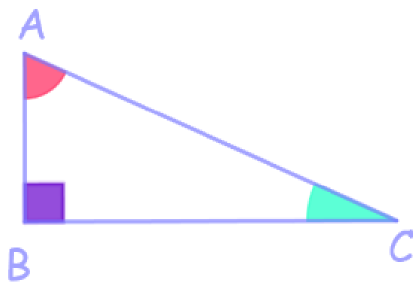
$\widehat{CAB} + \widehat{ABC} = 28° + 52$ $= 80°$	*On calcule la somme des deux mesures connues. C'est important d'indiquer le nom des angles, sinon le lecteur ne sait pas ce que l'on fait.*
La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.	*On cite la propriété que l'on va utiliser.*
$\widehat{ACB} \; = 180° - 80° = 100°$	*On soustrait la somme calculée à 180°.*
L'angle $\widehat{ACB}$ mesure 100°.	*On conclut.*

Seule la partie de gauche du tableau est à écrire.

Exemple Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACB}$?

Rédige la réponse dans le cahier d'exercices.





Propriété 2 : La somme des mesures des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 90°.

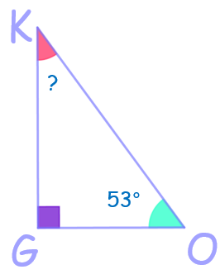
$$\widehat{CAB} + \widehat{ACB} = 90°$$

Définition : Deux angles dont la somme des mesures est égale à 90° sont appelés angles **complémentaires**.

La propriété 2 peut s'énoncer de cette façon : **« Les angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires ».**

Démonstration :
Considérons un triangle ABC rectangle en B.
La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° (propriété 1).
ABC étant rectangle en B, la mesure de l'angle $\widehat{CBA}$ est égale à 90° (définition du triangle rectangle).
Donc la somme des deux angles aigus est égale à 180°- 90°, soit 90° :

$$\widehat{CAB} + \widehat{ACB} = 90°$$

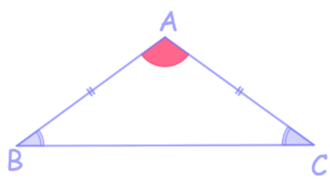


Application : Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{OKG}$?

La somme des mesures des deux angles aigus d'un triangle rectangle est égale à 90°.	*On cite la propriété que l'on va utiliser.*
$\widehat{OKG} = 90° - 53° = 37°$	*On effectue la différence entre 90° et la mesure de l'angle aigu connue.*
L'angle $\widehat{OKG}$ mesure 37°.	*On conclut.*

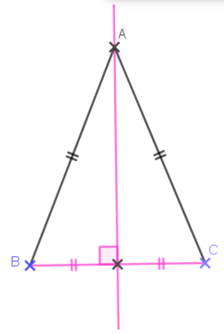
Propriété 3 : Les deux angles à la base d'un triangle isocèle ont la même mesure.

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$$

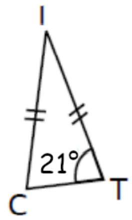


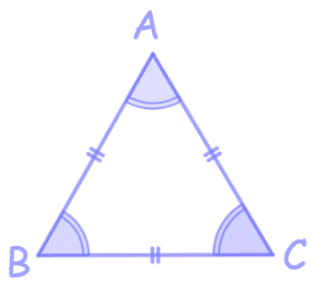
On doit cette propriété au mathématicien Thalès :

Démonstration :
Considérons un triangle ABC isocèle en A.
D'après une propriété étudiée l'année dernière, la médiatrice de [BC] est un axe de symétrie du triangle.
Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont symétriques par rapport à cette médiatrice.
Or, la symétrie axiale conserve les mesures d'angle.
Donc les angles à la base $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ ont la même mesure.



Application : Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ICT}$? Déduis-en la mesure de l'angle $\widehat{CIT}$.



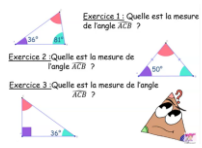


Propriété 4 : Les trois angles d'un triangle équilatéral ont la même mesure. Cette mesure est égale à 60°.

$$\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC} = 60°$$

Démonstration :
Considérons un triangle ABC équilatéral. Puisqu'il est équilatéral, ce triangle est en particulier isocèle en A : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ d'après la propriété 3.
Ce triangle est aussi isocèle en B : $\widehat{ACB} = \widehat{BAC}$ d'après la propriété 3.
En reprenant ces deux égalités : $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \widehat{BAC}$.
Les trois angles d'un triangle équilatéral ont donc la même mesure.
Or la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° donc cette mesure est égale au tiers de 180°, c'est-à-dire 60°.

Questions flash :



Exercices corrigés en vidéo : à rédiger dans le cahier d'exercices, puis à corriger

Classe Genially :