

Logique au collège

Groupe logique de l'IREM de Paris

18/10/2018

DOCUMENT PROVISOIRE

Ce document est sous licence Creative Commons BY-NC-SA

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/fr/>



La présente brochure est le fruit du travail d'écriture et de relecture des membres du groupe logique : François Bergeault, René Cori, Françoise Hérault, Géraldine Kel-Notter, Zoé Mesnil, Cécile Prouteau.

Mais son contenu doit aussi à toutes les personnes qui ont participé au groupe Logique depuis sa création, à savoir, en plus de celles déjà mentionnées :

Céline Ali Chérif, Laure Argelliès, Matthew Berrebi, Benjamin Bertrand, Catherine Huet, Isabelle Jooris, Julie Lascar, Marie-Hélène Mourgues, Benoît Roth, Paul Rozière.

Nous remercions Gwenola Madec et Jean-Christophe Masseron pour les relectures.

La version actuelle est une version de travail, elle est donc amenée à être modifiée. La première source de modification, ce sont nos relectures encore en cours, et vos lectures : n'hésitez pas à nous communiquer toute remarque sur ce document à zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr.

La deuxième source de modification, ce sont des activités que nous n'avons pas encore eu le temps de finaliser (sur le théorème de Pythagore, sur l'implication...). N'hésitez donc pas à consulter régulièrement le site du groupe Logique, nous y déposerons à chaque fois la dernière version.

Table des matières

Introduction	5
I. Rappels sur les notions de logique mathématique que l'on peut aborder au collège	8
1) Expressions mathématiques et variables	8
a) Noms et propositions	8
b) Variables.....	9
c) Connecteurs	10
2) Négation	10
3) Conjonction et disjonction.....	11
4) Implication	12
a) Généralités sur l'implication	12
b) Réciproque et contraposée.....	14
c) Si ... alors et ..., donc...	15
5) Équivalence.....	15
6) Quantificateurs	16
a) Généralité sur les quantificateurs	16
b) Relations entre les différents types de propositions	17
c) Petit historique du carré des oppositions	18
7) Les différents types de raisonnement	20
a) Raisonnement par <i>Modus Ponens</i>	20
b) Raisonnement par <i>Modus Tollens</i>	20
c) Raisonnement par contraposée	21
d) Raisonnement par l'absurde.....	21
e) Raisonnement par disjonction des cas.....	22
II. La logique au fil des cours.....	23
1) Expressions mathématiques : noms et propositions, variables	23
a) Écrire une définition, une propriété ou un théorème.....	23
b) À question différente, réponse différente	24
c) Expression littérale	26
2) Négation : formuler la négation d'une proposition	28
3) Conjonction et disjonction.....	29
a) Définition du milieu d'un segment.....	29
b) Inégalités larges et principe du maximum d'information	31

c) ET/OU et équations produits	31
d) Disjonction, négation et les expressions « au plus », « au moins », « ... ou plus », « ...ou moins »,	31
4) Implication	34
a) Formulation en « Si ... alors ... »	34
b) Réciproque du théorème de Thalès	34
5) Équivalence : la formulation des propriétés caractéristiques	37
a) Critères de divisibilité	37
b) Médiatrice	39
c) Angles alternes internes et parallélismes	39
6) Quantificateurs : quantification universelle dans les propriétés	40
7) Les différents types de raisonnement	42
a) Comment utiliser une propriété : une activité en soi, un exemple autour des théorèmes de la droite des milieux	42
b) Autres exemples à venir	45
III. Activités	46
1) Sacs de boules et Quadrilatères	46
a) Objectifs	46
b) Déroulement de l'activité « Sacs de boules »	47
c) Fiche élève de l'activité « Sacs de boules »	47
d) Analyse des réponses	48
e) Déroulement de l'activité « Quadrilatères »	51
f) Fiche élève de l'activité « Quadrilatères »	51
g) Analyse de copies et éléments de correction	53
2) Divisibilité	59
a) Objectifs	59
b) Déroulement	59
c) Fiche élève de l'activité « Divisibilité »	60
d) Analyse des réponses et éléments de correction	63
e) Retour sur certaines formulations : « et », « ou », « ni ... ni », « soit »	67
3) Calcul littéral et quantifications	68
a) Objectifs	68
b) Déroulement	68
c) Fiche élève de l'activité « Calcul littéral et quantifications »	69

d) Éléments de correction et réponses d'élèves	71
4) Tableau récapitulatif des activités	75
IV. Annexes	76
Activité Sacs de boules	77
Activité Quadrilatères	78
Activité Divisibilité.....	84
Théorème de Thalès : Éléments d'Euclide.....	87
À la recherche du bon théorème : figures	88
À la recherche du bon théorème (1).....	90
À la recherche du bon théorème (2).....	91
À la recherche du bon théorème (3).....	92
V. Index	93
VI. Bibliographie et sitographie.....	94

Introduction

Beaucoup de gens s'entendront pour dire que pour être « bon en maths », il faut posséder un « esprit logique ». Entrons tout de suite dans le vif du sujet de cette brochure : qu'est-ce que cela signifie ? Que toute personne « bonne en maths » possède un « esprit logique », ou, plus formellement, que

(*) pour toute personne P,

si P est « bonne en maths » alors P possède un « esprit logique »

Qu'en est-il de la réciproque ? Toute personne possédant un « esprit logique » est-elle « bonne en maths » ? Est-il suffisant de posséder un « esprit logique » pour être « bon en maths » ? On trouve sur un site d'énigmes mathématiques ¹ la déclaration suivante : « Pour résoudre ces problèmes, il n'est pas forcément nécessaire d'être bon en maths. Un esprit logique peut suffire mais pas toujours », qui sous-entend qu'une personne peut posséder un « esprit logique » sans être « bonne en maths », c'est-à-dire que la réciproque de l'affirmation (*) est fausse.

Nous ne cherchons pas ici à vérifier ou à invalider l'affirmation (*) ou sa réciproque, elles ne nous servent que pour montrer que les liens entre logique et mathématiques sont complexes, et qu'ils suscitent des prises de positions différentes. Cette complexité se retrouve dans l'histoire de la logique d'Aristote à Russell [1], de la théorie des syllogismes à la logique mathématique.

Qu'est-ce que la logique mathématique ? Donnons la parole à Daniel Lacombe [2], qui en propose la définition suivante, tout en précisant qu'elle « a l'air d'une plaisanterie » :

La logique mathématique c'est une branche des mathématiques, une branche des mathématiques appliquées, [...] appliquée aux mathématiques. Ce qui donne à la logique mathématique dès le début cet aspect circulaire, de serpent se mordant la queue qui, en fait, fait son charme. [...] [la logique mathématique est un modèle, et] le domaine extra-mathématique qu'il s'agit de modéliser, c'est ce qu'on appelle quelque fois la métamathématique, il vaudrait mieux dire la métamathématique naïve, qui s'occupe non pas des objets mathématiques, mais de ce qu'on fait lorsqu'on traite des objets mathématiques, ce qui n'est pas du tout la même chose. [Lacombe, 1997, 15'10 → 19'54]

Partant de cette idée que la logique mathématique traite de notions mathématiques qui permettent de décrire l'activité mathématique, nous pensons que faire état de ces notions, les étudier, nous aide à nous exprimer, à raisonner, à prouver. Bien sûr, là non plus ce n'est pas si simple : les tentatives d'enseignement explicite de logique mathématique pendant la période des mathématiques modernes (les années 70) ont montré qu'il ne suffisait pas d'enseigner de la logique mathématique pour aider les élèves à manipuler le langage et le raisonnement mathématique. Mais là encore, le

1 <http://www.enigme-facile.fr/enigme-mathematique>

fait que ce ne soit pas suffisant ne signifie pas que ça ne soit pas pertinent. D'ailleurs, après plusieurs années durant lesquelles la logique mathématique était bannie des programmes de mathématiques, elle est réapparue dans les programmes pour le lycée de 2009 [3].

Il ne s'agit pas pour nous de prôner l'enseignement de la logique mathématique sous la forme d'un chapitre spécifique, au collège ou au lycée. Nous proposons que les enseignants aient un minimum de connaissances en logique mathématique, qui leur permette d'en parler avec leurs élèves à des moments jugés opportuns. Telle était probablement l'intention des rédacteurs des programmes du lycée lorsqu'ils écrivaient : « Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques mais doivent prendre naturellement leur place dans tous les chapitres du programme. » (Programme de mathématiques pour la classe de Seconde, BO du 23 juillet 2009). Mais cette place ne se trouve peut-être pas si naturellement que cela ! Et la volonté fortement proclamée de bannir tout enseignement de notions de logique a occulté celle de donner enfin sa place à la logique dans l'enseignement des mathématiques, au point qu'un grand nombre de professeurs se sont sentis mal à l'aise. Ils ne savaient pas exactement ce que l'on attendait d'eux et, il faut bien le dire, ils n'avaient reçu aucune formation pour accompagner ces changements.

Nous réfléchissons à ces questions depuis 2010 au sein du groupe Logique de l'IREM de Paris.

Effet des nouveaux programmes, notre travail a d'abord porté sur le lycée. Il a donné lieu à l'animation d'ateliers, à l'écriture de documents de travail (disponibles sur le [site du groupe](#)) et d'articles (revues *Plot* [4] et *Petit'x* [5]), et à l'organisation de stages proposés par l'IREM dans le cadre des plans de formation continue des trois académies franciliennes.

Nous présentons aujourd'hui dans cette brochure nos réflexions sur le collège, car il est évident pour nous que les difficultés, et donc les remédiations possibles, commencent bien avant le lycée. Le mot « logique » n'apparaît qu'une fois dans les programmes de collège de 2015, et en tant qu'adjectif : dans la compétence « raisonner » au cycle 4, nous pouvons lire « démontrer : utiliser un raisonnement logique et des règles établies pour parvenir à une conclusion » (Programme de mathématiques pour le cycle 4, BO du 26 novembre 2015 [6]). Ainsi, nous ne pouvons vraiment pas dire que les programmes nous incitent à « faire de la logique »... Mais ils ne nous interdisent pas de le faire !

Certes, nous n'imaginons pas que toutes les notions de logique abordées au collège au travers de nos activités seront complètement disponibles pour tous les élèves au sortir du cycle 4, et il va de soi qu'elles ne sauraient être exigibles. Par contre il nous semble très important de familiariser progressivement les élèves avec ces notions. Nous avons pu constater par exemple que des élèves de troisième qui avaient pratiqué certaines de ces activités pendant 2 ans reformulaient volontiers, et de façon assez pertinente, les propositions mathématiques qui leur étaient soumises, et, de ce fait, les

comprenaient mieux. De plus, certains avaient acquis de bons réflexes pour prouver ou pour réfuter des propositions existentielles ou universelles. Les témoignages de quelques-uns de ces élèves indiquent que, pour eux, monter la marche conduisant au cours de mathématiques de la classe de seconde a été moins difficile que pour leurs camarades des années antérieures.

La première partie de cette brochure est une présentation des différentes notions de logique qui sont ensuite abordées dans les activités. Il ne s'agit pas d'un cours de logique mathématique, mais c'est bien à la logique mathématique que nous nous référons. Les personnes intéressées trouveront un propos plus détaillé dans les documents du [cours Langage Mathématique proposé par René Cori à l'Université Paris Diderot](#) [7], ou dans la [thèse de Zoé Mesnil](#) [8].

La deuxième partie donne des exemples de moments du cours de mathématiques qui sont pertinents pour parler de telle ou telle notion. La liste n'est bien sûr pas exhaustive, nous espérons que les exemples que nous avons choisis seront éclairants.

Dans la troisième partie, nous présentons des activités qui ont été plus spécifiquement conçues pour aborder des notions de logique, même si cela se fait évidemment en lien avec d'autres notions mathématiques.

Il y a évidemment des liens entre les trois parties, une même notion pouvant être abordée dans d'eux d'entre elles, voire dans les trois. Lorsque c'est le cas, les renvois appropriés sont indiqués. La lecture linéaire du texte n'est donc pas obligatoire, et le lecteur peut emprunter plusieurs chemins pour parcourir la brochure. Par exemple, les considérations théoriques relatives à la disjonction, page 11, sont illustrées dans la deuxième partie, page 29, et dans la troisième, page 59.

Quel que soit le chemin que vous empruntez, nous vous souhaitons une bonne lecture !

I. Rappels sur les notions de logique mathématique que l'on peut aborder au collège

L'objectif de cette section est de rappeler brièvement quelques notions de logique sans entrer dans le détail du calcul propositionnel et du calcul des prédicats. Nous aborderons tout d'abord les notions de proposition et de variable, puis présenterons les éléments intervenant dans la construction des propositions : d'abord chacun des connecteurs usuels (NON, ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À), puis les quantificateurs. Nous traiterons finalement des différents types de raisonnement permettant de prouver des propositions.

Tout au long de cette section des renvois aux sections suivantes permettront de relier les notions théoriques à des activités proposées en classe.

1) Expressions mathématiques et variables

a) Noms et propositions

Les noms servent à désigner les objets mathématiques. Bien sûr, un même objet peut avoir différents noms, et une partie du travail mathématique consiste justement à découvrir que sous deux noms différents se cache un même objet (par exemple, calculer la valeur d'une intégrale revient à donner un nom plus simple à un réel).

Une proposition mathématique porte sur un (ou des) fait(s) concernant un (ou des) objet(s) mathématique(s). Elle est susceptible d'être vraie ou fausse. Ainsi, « 3 est impair » est une proposition vraie, « 2 est impair » est une proposition fausse. Pour une variable n pouvant prendre ses valeurs dans \mathbb{N} , « n est impair » est une proposition pour laquelle cela a un sens de se demander si elle est vraie ou fausse, mais nous ne pouvons pas répondre à cette question en l'absence d'informations supplémentaires sur n .

Par contre, « 3 est impair donc 3^2 est impair » n'est pas une proposition. Cette phrase ne met pas en jeu seulement des objets mathématiques, elle met en jeu une personne en train d'affirmer des propriétés de ces objets et qui fait un lien entre elles. Cet exemple montre que le discours mathématique est loin de n'être constitué que de propositions, mais nous défendons l'idée qu'un travail explicite les propositions (formuler une proposition équivalente, formuler la négation d'une proposition, formuler la réciproque, la contraposée...) est pertinent pour aider les élèves à mieux s'approprier les caractéristiques du langage mathématique, et donc à produire un discours mathématique plus cohérent.

b) Variables

Dans certaines propositions mathématiques nous utilisons des variables, qui sont des noms d'objets. Une variable est un symbole (généralement une lettre) appelé à désigner des objets dans un ensemble. Nous éviterons soigneusement de dire que la variable *appartient* à l'ensemble. Nous dirons qu'elle prend ses valeurs dans l'ensemble en question, ou qu'elle est astreinte à cet ensemble. Au collège, nous parlons de variable essentiellement en algèbre et dans le domaine des fonctions ce qui pourrait amener les élèves à penser qu'une variable désigne forcément un nombre. De notre point de vue :

1. La proposition « pour tous points du plan A, M et B, si $MA = MB$ alors M appartient à la médiatrice de [AB] » contient trois variables A, M et B astreintes à l'ensemble des points du plan.
2. La proposition « pour tous nombres réels x et y, si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$ » contient trois variables, x et y astreintes à \mathbb{R} mais aussi la variable f qui représente une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Prenons un autre exemple, avec les deux propositions « n est premier et n est impair » et « quelque que soit l'entier naturel n , si n est impair alors n^2 est impair », dans lesquelles la variable n est astreinte à l'ensemble \mathbb{N} . Il y a une distinction fondamentale entre ces deux propositions concernant la variable n : d'un point de vue naïf, nous dirons que la première proposition « parle » de n , elle dit quelque chose sur un objet qui s'appelle n , alors que la deuxième donne une propriété (il se trouve qu'elle est vraie) des entiers naturels, que nous pouvons d'ailleurs formuler sans utiliser de variable : « tout entier naturel impair a un carré impair ». Nous pouvons caractériser ainsi le statut de la variable n dans chacune de ces propositions : elle est parlante (ou libre) dans la première, elle est muette (ou liée) dans la deuxième.

Nous pouvons souvent reformuler les propositions en éliminant les variables muettes, ce qui donne pour les propositions des exemples 1 et 2 précédents :

1. « Tout point équidistant des extrémités d'un segment appartient à la médiatrice de ce segment. »
2. « f est croissante sur \mathbb{R} »

Nous voyons que dans l'exemple 2, la variable f, qui est libre, a été conservée.

Nous ne proposons certainement pas de définir explicitement les notions de proposition et de variable avec des élèves de collège mais plutôt d'être attentifs à la manière dont nous formulons et reformulons les propositions au fil des cours. Les définitions, propriétés et théorèmes sont l'occasion pour les élèves d'être confrontés à des propositions mathématiques et à des variables. Nous présentons dans la partie II (*La logique au fil des cours*) notre réflexion sur la formulation de définitions en arithmétique (page 23).

c) Connecteurs

D'un point de vue syntaxique (qui concerne la forme), les connecteurs logiques sont des mots ou des symboles qui sont utilisés pour construire de nouvelles propositions mathématiques à partir de propositions données. Considérons par exemple les deux propositions :

- « Le quadrilatère Q a un angle droit »
- « Le quadrilatère Q est un losange »

Pour montrer que le quadrilatère Q est un carré, nous pouvons être amenés à construire la proposition « Le quadrilatère Q a un angle droit ET Le quadrilatère Q est un losange » en utilisant le connecteur ET.

Les règles syntaxiques auxquelles est soumis l'usage des connecteurs ne sont pas simples. Elles le sont d'autant moins qu'elles interfèrent avec les règles syntaxiques de la langue française usuelle. C'est certainement une source de difficulté accrue pour nos élèves.

D'un point de vue sémantique (qui concerne le sens), chaque connecteur logique est caractérisé par le choix de la valeur de vérité (Vrai ou Faux, que nous représenterons par V et F) obtenue en fonction des valeurs de vérité des propositions qu'il relie². Pour l'exemple précédent qui utilise le connecteur ET, la proposition « Le quadrilatère Q a un angle droit ET Le quadrilatère Q est un losange » est vraie dans le seul cas où les deux propositions à partir desquelles elle est formée sont vraies.

Les connecteurs usuels (NON, ET, OU, IMPLIQUE, ÉQUIVAUT À) sont ainsi définis par les tables de vérité que nous verrons dans les parties suivantes.

2) Négation

À partir d'une proposition A, on peut former sa négation NON A.

Le connecteur NON est défini par la table de vérité suivante :

A	NON A
V	F
F	V

Bien sûr, lorsque l'on demande de formuler la négation d'une proposition, la réponse attendue est rarement le simple fait d'apposer le connecteur NON à cette proposition. Si l'on demande à des mathématiciens quelle est la négation de « pour tout entier n, n

² Pour les connecteurs binaires par exemple, il y a 4 distributions de valeurs de vérité possibles sur des propositions A et B, et à chaque distribution on peut associer la valeur Vrai ou la valeur Faux, il existe donc 16 connecteurs binaires différents.

est pair », très peu d'entre eux répondront « NON (pour tout entier n , n est pair) »³, mais plutôt « il existe un entier n tel que n est impair ». Ce faisant, ils utilisent un certain nombre de règles, que nous verrons dans les paragraphes suivants, qui permettent de « faire rentrer la négation dans la parenthèse » en transformant opportunément son contenu. Ainsi, la négation obtenue n'a pas du tout une forme négative ! Nous y reviendrons (page 28), et nous verrons qu'il y a plusieurs négations possibles (ici, on aurait pu également proposer « il existe un entier n tel que n n'est pas pair », « tous les entiers ne sont pas pairs »...)

3) Conjonction et disjonction

À partir de deux propositions A et B , on peut former :

- leur conjonction qui est la proposition (A ET B)
- leur disjonction qui est la proposition (A OU B)

Les connecteurs ET et OU⁴ sont définis par les tables de vérité suivantes :

A	B	A ET B	A OU B
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	F

Il y a une dualité entre ces deux connecteurs. Ainsi, pour toutes propositions A et B :

(A ET B) est Vraie si et seulement si A et B sont simultanément Vraies.

(A OU B) est Fausse si et seulement si A et B sont simultanément Fausses.

Cette dualité apparaît aussi dans les lois de De Morgan, qui décrivent l'effet de la négation sur la conjonction et la disjonction :

Pour toutes propositions A et B :

- NON (A ET B) est logiquement équivalente⁵ à (NON A OU NON B)
- NON (A OU B) est logiquement équivalente à (NON A ET NON B).

³ Qui est pourtant, rigoureusement parlant, effectivement la négation de la proposition considérée

⁴ Ils sont ici notés en majuscule pour les distinguer des autres et, ou présents dans le texte qui ne sont pas des connecteurs logiques.

⁵ « Deux propositions sont logiquement équivalentes » signifie qu'elles ont même table de vérité, c'est-à-dire qu'elles sont vraies en même temps et fausses en même temps. On s'en convaincra facilement ici.

Nous verrons dans la partie II que tous les « et » que nous rencontrons en mathématiques ne sont pas des connecteurs logiques ET (équation produit page 31), et que le connecteur OU soulève d'autres difficultés que celle due au fait qu'il est inclusif (Inégalités larges et principe du maximum d'information page 31). Par ailleurs nous proposons dans la partie III (*Activités*) une séquence qui propose un travail sur les connecteurs ET / OU dans le cadre d'une activité sur les critères de divisibilité (page 59).

4) Implication

a) Généralités sur l'implication

À partir de deux propositions A et B, on peut former l'implication $A \Rightarrow B$. La proposition A est appelée prémisses de l'implication (il vaut vraiment mieux éviter le mot « hypothèse »), la proposition B est appelée conclusion de l'implication. Le mot « conclusion » est le pendant de « hypothèse » et il aurait mieux valu pouvoir l'éviter, mais l'usage n'a pas consacré d'autre terme qui aurait été le pendant de « prémisses ». Nous suggérons d'insister beaucoup sur le fait que ce n'est pas parce qu'une implication est vraie que sa conclusion doit l'être ! Cela renvoie à la distinction entre « si... alors... » et « ..., donc ... » que nous expliciterons page 15.

Le connecteur IMPLIQUE est défini par la table de vérité suivante :

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Cette table de vérité nous permet de vérifier que :

- La négation de $A \Rightarrow B$ est logiquement équivalente à (A ET NON B). En effet, $A \Rightarrow B$ est fausse dans le seul cas où la prémisses A est vraie et où la conclusion B est fausse.
- $A \Rightarrow B$ est logiquement équivalente à (NON A OU B).
- $A \Rightarrow B$ n'est pas logiquement équivalente à $B \Rightarrow A$.
- Le fait que $A \Rightarrow B$ soit vraie ne garantit ni que A est vraie, ni que B est vraie !

Les deux premières lignes de la table de vérité font l'unanimité. Tout le monde s'accorde à dire que la proposition $A \Rightarrow B$ est fausse lorsque la prémisses A est vraie et que la conclusion B est fausse, et que cette proposition est vraie lorsque la prémisses et la conclusion sont toutes les deux vraies.

Ce sont les deux dernières lignes qui provoquent le trouble. L'idée que la proposition $A \Rightarrow B$ est vraie lorsque sa prémisses est fausse, et ce quelle que soit la valeur de vérité

de sa conclusion, est difficilement admise. Une manière un peu brutale, mais assez efficace, de lever le doute, est d'examiner les tables de vérité correspondant aux trois autres configurations possibles pour ces deux dernières lignes :

A	B	A ??? B (possibilité I)	A ??? B (possibilité II)	A ??? B (possibilité III)
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Or ces trois tables nous sont familières. La table donnée en possibilité II est celle de l'équivalence $A \Leftrightarrow B$ que nous verrons dans la partie suivante, la table donnée en possibilité III est celle de la conjonction (A ET B), et la table donnée en possibilité I est celle de la « deuxième projection », c'est-à-dire du connecteur qui à A et B associe B. De toute évidence, aucune d'elles ne peut convenir comme table de l'implication : la proposition $A \Rightarrow B$ n'est équivalente ni à B, ni à $A \Leftrightarrow B$, ni à (A ET B).

La cause est donc entendue ? « Pas si vite ! » disent certains, qui estiment qu'on peut très bien décider que, lorsque la prémisse est fausse, la proposition $A \Rightarrow B$ a une valeur indéterminée. Ceux-là se refusent à envisager le cas d'une implication (de la forme $A \Rightarrow B$) dont la prémisse serait fausse, prétendant qu'une telle situation ne se rencontre jamais en mathématiques. Une telle position n'est pas tenable : chacun conviendra par exemple que la proposition

$$(\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1)$$

est vraie.

Mais admettre cela oblige aussitôt à admettre que les trois propositions suivantes doivent être vraies :

$$3 \geq 1 \Rightarrow 3^2 \geq 1$$

$$0 \geq 1 \Rightarrow 0^2 \geq 1$$

$$-2 \geq 1 \Rightarrow (-2)^2 \geq 1$$

Or, si pour la première on est dans le cas inoffensif « VRAI \Rightarrow VRAI », la deuxième correspond à « FAUX \Rightarrow FAUX », et la troisième à « FAUX \Rightarrow VRAI ». Les trois lignes de la table de vérité où le connecteur \Rightarrow prend la valeur VRAI sont donc bel et bien mises en œuvre en pratique.

Une autre manière de convaincre les sceptiques est de leur demander dans quels cas une proposition de la forme $A \Rightarrow B$ est fausse, ou, ce qui revient essentiellement au même, de les inviter à examiner la négation de cette proposition. Montrer que A est vraie et que B est fausse est la seule manière de convaincre que $A \Rightarrow B$ est fausse.

En mathématiques en général et au collège particulièrement nous utilisons l'expression « Si ... alors ... » plutôt que le symbole \Rightarrow ou le terme « implique ». Par ailleurs, cette expression est utilisée entre deux propositions qui ont au moins une variable libre, par exemple « Si $(x-1)(x-2) = 0$ alors $x = 1$ ». Cette proposition est déclarée fautive par une grande majorité d'élèves, d'enseignants de mathématiques, et de chercheurs en mathématiques, preuve à l'appui : 2 est un contre-exemple. Mais elle laisse dans l'embarras quelques personnes qui hésitent à lui attribuer une valeur de vérité déterminée [9]. Ont-elles complètement tort d'hésiter ? Pas tant que cela : regardons cette proposition comme une « simple » implication, c'est-à-dire comme la proposition « $(x-1)(x-2) = 0$ IMPLIQUE $x = 1$ ». La variable x est libre. Pour la valeur $x = 1$, cette proposition est évidemment vraie. Pour la valeur $x = 2$, elle est évidemment fautive, comme pour la valeur $x = 3$ d'ailleurs. Elle est donc bien vraie pour certaines valeurs prises par la variable, et fautive pour d'autres, il y a bien là de quoi hésiter. Alors est-ce que tous les autres se trompent ? Pas vraiment non plus, ceux-là lisent cette proposition comme une implication universellement quantifiée, c'est-à-dire « Pour tout réel x , $(x-1)(x-2) = 0$ IMPLIQUE $x = 1$ », qui est bien fautive, tout le monde s'accordera facilement là-dessus.

La pratique en mathématiques est effectivement de lire les implications (qu'elles soient formulées avec IMPLIQUE, la flèche, ou l'expression « Si ... alors ... ») comme étant universellement quantifiées sur toutes les variables libres. Il convient au minimum de mettre les élèves au courant de cette pratique, mais l'on peut aussi, pour éviter toute ambiguïté, expliciter cette quantification (ce qui aura l'avantage qu'elle ne soit pas oubliée si l'on est amené à formuler la négation).

b) Réciproque et contraposée

À partir d'une implication $A \Rightarrow B$, nous définissons :

- Sa réciproque, $B \Rightarrow A$
- Sa contraposée, $\text{NON } B \Rightarrow \text{NON } A$

Cette définition syntaxique de la réciproque peut donner l'impression que formuler une réciproque est un pur jeu de forme qui consiste à échanger prémisses et conclusion. Ce n'est pas si simple, car les implications sont souvent formulées sous la forme « si..., alors ... » où ce qui est à la place des pointillés n'est pas à strictement parler une proposition. Par exemple, regardons l'implication « si un quadrilatère a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle », nous voyons bien que « un quadrilatère a ses diagonales de même longueur », et « c'est un rectangle » ne sont pas des propositions qui peuvent être comprises de façon autonome. Nous ne proposerons donc pas pour réciproque « si c'est un rectangle alors un quadrilatère a ses diagonales de même longueur » (bien que ce soit grammaticalement correct), mais plutôt « si un quadrilatère est un rectangle, alors il a ses diagonales de même longueur ». La remarque vaut encore plus pour la contraposée, où l'apparition de la négation provoque une transformation supplémentaire de la structure des phrases utilisées initialement.

Nous verrons également dans la partie II que certaines réciproques bien connues n'en sont pas vraiment... (« réciproque » du théorème de Thalès page 34)

Toute implication est logiquement équivalente à sa contraposée, c'est-à-dire qu'elles sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.

Une implication et sa réciproque ne sont pas nécessairement logiquement équivalentes ! Il est donc légitime, en présence d'une implication universellement quantifiée vraie, de la forme « pour tout x , $A[x] \Rightarrow B[x]$ », de se demander si la réciproque « pour tout x , $B[x] \Rightarrow A[x]$ » est également vraie.

c) Si ... alors et ..., donc...

Les deux phrases suivantes signifient-elles la même chose ?

- Si $(x-1)(x-2) = 0$ alors $x = 1$ ou $x = 2$
- $(x-1)(x-2) = 0$ donc $x = 1$ ou $x = 2$

Prenons deux phrases analogues de la vie courante :

- Si j'ai 40° de fièvre alors je ne vais pas travailler
- J'ai 40° de fièvre donc je ne vais pas travailler

Nous voyons bien que la deuxième ne peut être prononcée que par quelqu'un qui a 40° de fièvre et qui ne va pas travailler alors que la première peut être prononcée par quelqu'un qui n'a pas de fièvre. La seule chose que nous savons sur la première phrase c'est qu'elle ne peut pas être prononcée par quelqu'un qui a 40° de fièvre et qui va quand même travailler.

De quelles informations disposons-nous si nous savons que la proposition « Si A alors B » est vraie ? Cela ne nous dit rien sur les valeurs de vérité de A et de B. La seule information que nous ayons c'est qu'il n'est pas possible que A soit vraie et qu'en même temps B soit fausse.

De quelles informations disposons-nous en affirmant « A donc B » ? En fait il y en a 3 :

- A est vraie
- B est vraie
- On a de bonnes raisons d'avoir déduit la deuxième information de la première.

« Si A alors B » est une proposition alors que « A donc B » n'en est pas une puisqu'elle met en jeu un locuteur qui déduit la vérité de B à partir de celle de A (entre autres).

5) Équivalence

À partir de deux propositions A et B, on peut former l'équivalence $A \Leftrightarrow B$.

Le connecteur ÉQUIVAUT À est défini par la table de vérité suivante :

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

La proposition $A \Leftrightarrow B$ est logiquement équivalente à $(A \Rightarrow B)$ ET $(B \Rightarrow A)$.

De ce fait, de même que pour les implications, les équivalences sont lues avec une quantification universelle portant sur les variables libres.

Sa négation est logiquement équivalente à la proposition $[(A \text{ ET NON } B) \text{ OU } (\text{NON } A \text{ ET } B)]$ qui est logiquement équivalente à $(A \text{ OU BIEN } B)$, où OU BIEN est le connecteur correspondant au ou exclusif.

Dans les propriétés énoncées ci-dessus, nous avons utilisé la relation « être logiquement équivalente à » définie page 11. C'est une relation entre deux propositions, qui ne se situe pas au même « niveau » que le connecteur ÉQUIVAUT À, qui est un élément de langage avec lequel nous construisons des propositions. Bien sûr, il y a une relation entre ces deux objets : deux propositions A et B sont logiquement équivalentes si et seulement si la proposition $(A \text{ ÉQUIVAUT À } B)$ est toujours vraie.

À un niveau avancé en mathématiques, nous utilisons spontanément le connecteur ÉQUIVAUT À pour écrire des propriétés caractéristiques. L'expression alors utilisée est le plus souvent « si et seulement si ». Au collège, elle est peu utilisée alors que les élèves rencontrent des propriétés caractéristiques. Nous reviendrons dans la partie II (page 37) sur différentes formulations alternatives.

6) Quantificateurs

a) Généralité sur les quantificateurs

Un quantificateur permet de construire une nouvelle proposition en opérant sur une variable et sur une proposition. En mathématiques nous utilisons deux quantificateurs :

- Le quantificateur universel, qui appliqué à une variable x astreinte à un domaine E permet d'obtenir, à partir d'une proposition $P[x]$, la proposition $\forall x P[x]$
- Le quantificateur existentiel, qui appliqué à une variable x astreinte à un domaine E permet d'obtenir, à partir d'une proposition $P[x]$, la proposition $\exists x P[x]$

La proposition $\forall x P[x]$ est vraie lorsque pour chaque élément a de l'ensemble E la proposition $P[a]$ est vraie.

La proposition $\exists x P[x]$ est vraie lorsqu'il existe au moins un élément a de l'ensemble E tel que $P[a]$ soit vraie.

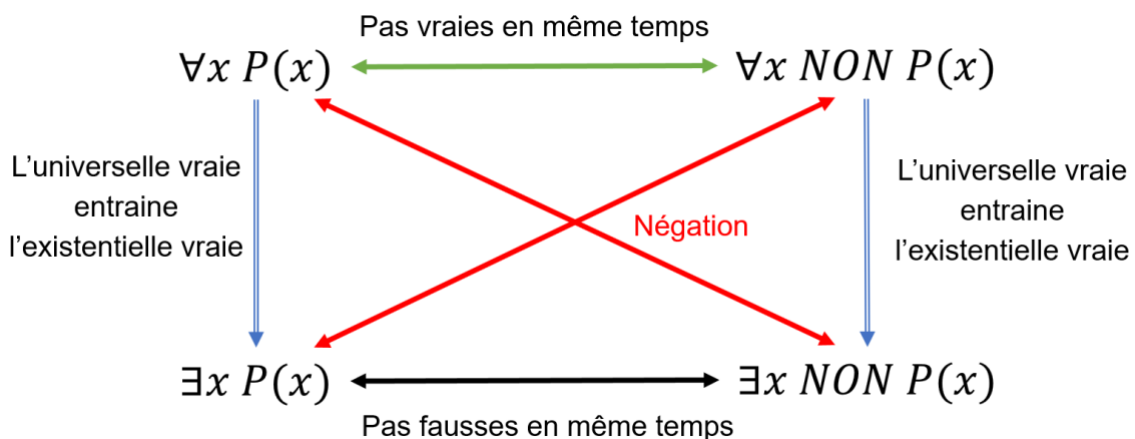
Nous avons les propriétés suivantes :

- La négation de la proposition $\forall x P[x]$ est logiquement équivalente à la proposition $\exists x \text{NON } P[x]$.
- La négation de la proposition $\exists x P[x]$ est logiquement équivalente à la proposition $\forall x \text{NON } P[x]$.

Pour marquer la quantification, les mathématiciens utilisent évidemment les quantificateurs, mais aussi bien d'autres procédés langagiers, que nous verrons dans la partie II (page 40) et par exemple dans l'activité *Sacs de boules et quadrilatères* (page 46).

b) Relations entre les différents types de propositions

Le schéma ci-dessous donne à voir différentes relations entre les quatre types de propositions comportant une quantification que l'on peut mettre en évidence dans des activités pour la classe (voir encore l'activité sur les quadrilatères, page 46).



Les flèches rouges marquent la relation de contradiction, c'est-à-dire que les propositions aux extrémités sont la négation l'une de l'autre.

La flèche verte marque la « relation de contrariété » entre les propositions universelles : ces propositions ne peuvent pas être toutes les deux vraies (mais elles peuvent être toutes deux fausses).

La flèche noire marque la « relation de contrariété » entre les propositions existentielles : ces propositions ne peuvent pas être toutes les deux fausses (mais elles peuvent être toutes deux vraies).

Les flèches bleues marquent des « propositions subalternes » : la vérité de la proposition universelle entraîne la vérité de la proposition existentielle.

Les expressions entre guillemets ne sont plus en usage, elles ne sont donc pas à utiliser en classe. Ce schéma est inspiré du carré des oppositions dont nous présentons maintenant, à titre informatif, un rapide historique.

c) Petit historique du carré des oppositions

Dans ses œuvres logiques, réunies sous le nom d'*Organon*, Aristote (-384, -322) traite d'abord des propositions, qu'il définit comme étant « seulement le discours dans lequel réside le vrai ou le faux ». Aristote considère alors des propositions de la forme sujet-copule-prédicat (dans la proposition « tout homme est blanc », « homme » est le sujet, « est » est la copule, « blanc » est le prédicat) qui sont d'abord distinguées en qualité, affirmative ou négative, puis en quantité, universelle ou particulière, ce qui donne quatre types de propositions :

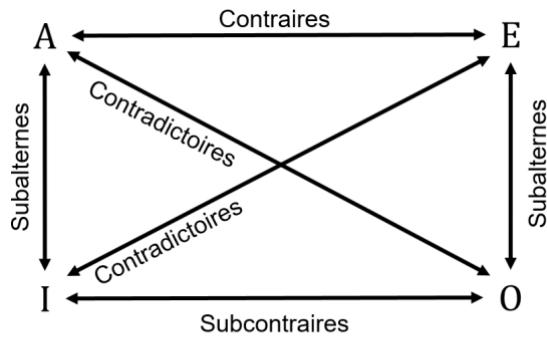
- Les universelles affirmatives : tout homme est blanc
- Les universelles négatives : nul homme n'est blanc
- Les particulières affirmatives : quelque homme est blanc
- Les particulières négatives : quelque homme n'est pas blanc.

Par ailleurs, Aristote élabore deux théories sur ces propositions : une théorie de l'opposition et une théorie de la conversion. Ces théories établissent des relations entre des propositions, relations entre leurs formes et entre leurs valeurs de vérité.

Aristote remarque qu'il existe deux relations d'opposition :

- D'une part la relation de contradiction entre des propositions qui s'opposent par la quantité et par la qualité, c'est-à-dire entre l'affirmative universelle (Tout B est A) et la négative particulière (Quelque B n'est pas A), ou entre la négative universelle (Nul B n'est A) et l'affirmative particulière (Quelque B est A), relation qui correspond à la notion de négation,
- D'autre part la relation de contrariété entre des propositions universelles qui s'opposent par la qualité, c'est-à-dire entre l'affirmative universelle (Tout B est A) et la négative universelle (Nul B n'est A).

La logique d'Aristote a continué d'être développée, d'abord par d'autres philosophes grecs, puis notamment par des philosophes du Moyen-Âge en Europe. Ceux-ci établissent les relations entre les valeurs de vérité des quatre types de proposition de façon plus exhaustive que ne l'a fait Aristote, relations qui sont résumées dans le carré des oppositions, et que nous présentons à travers un diagramme dû à Boèce, philosophe latin (470-524) :



A : Universelle affirmative
 E : Universelle négative
 I : Particulière affirmative
 O : Particulière négative

Carré des oppositions de Boèce

Ce carré des oppositions est également présent dans l'Idéographie (*Begriffsschrift*, 1879) de G. Frege (1848-1925), considéré comme le père de la logique mathématique actuelle (voir ci-dessous). Les quatre types de propositions sont exprimés dans un symbolisme qui n'a pas été conservé (ce qui est en noir aux quatre sommets du carré), les mathématiciens ayant préféré le symbolisme utilisé par Whitehead et Russell dans les *Principia Mathematica* (1910-1913), qui est celui que nous connaissons aujourd'hui (ici en vert), et que nous avons repris pour « traduire » ceux de Frege et d'Aristote (ici en rouge).

Tous les X sont P

$\forall a (X(a) \Rightarrow P(a))$

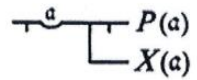


contraire

s
u
b
a
l
t
e
r
n
e

contra

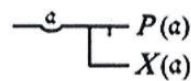
contra



contraire^[N]

Nul X n'est P

$\forall a (X(a) \Rightarrow \text{NON } P(a))$



s
u
b
a
l
t
e
r
n
e

dictoire

dictoire



NON ($\forall a (X(a) \Rightarrow \text{NON } P(a))$)

NON ($\forall a (X(a) \Rightarrow P(a))$)

$\exists a (X(a) \text{ ET } P(a))$

$\exists a (X(a) \text{ ET } \text{NON } P(a))$

Quelque X est P

Quelque X n'est pas P

Carré des oppositions de Frege

7) Les différents types de raisonnement

Nous présentons dans cette partie les schémas de raisonnement les plus courants, même s'ils ne sont pas tous également rencontrés au collège.

a) Raisonnement par *Modus Ponens*

Le schéma du *modus ponens* (ou *règle de détachement*) est le suivant :

Si A alors B,
or A,
donc B.

Il peut être associé à la tautologie ⁶ suivante : $((A \Rightarrow B) \text{ ET } A) \Rightarrow B$

Ce schéma de déduction est sans doute le plus fréquent en mathématiques et plus encore au collège. Notons que nous utilisons en fait le plus souvent une implication universellement quantifiée et que le schéma est alors plutôt le suivant, dans lequel la lettre *a* désigne une variable, une constante ou un nom d'objet plus complexe (une expression algébrique par exemple) :

Pour tout *x*, si $A[x]$ alors $B[x]$, or $A[a]$ donc $B[a]$

b) Raisonnement par *Modus Tollens*

Le schéma du *modus tollens* est le suivant :

Si A alors B,
or NON B,
donc NON A.

Il peut être associé à la tautologie suivante : $((A \Rightarrow B) \text{ ET NON } B) \Rightarrow \text{NON } A$

Une autre façon d'arriver à la conclusion NON A à partir de l'hypothèse NON B et de l'implication « Si A alors B » est d'appliquer le schéma du *modus ponens* à partir de la contraposée « Si NON B alors NON A ». Dans la classe, deux pratiques sont possibles :

- Lorsque qu'un théorème de la forme « Si A alors B » est affirmé dans le cours, nous disposons immédiatement d'un autre théorème, « Si NON B alors NON A », qui est sa contraposée. Nous pouvons alors appliquer le *modus ponens* à l'un ou l'autre de ces deux théorèmes.
- Lorsque qu'un théorème de la forme « Si A alors B » est affirmé dans le cours, nous pouvons appliquer le *modus ponens* ou le *modus tollens*.

⁶ Une tautologie est une proposition construite à partir de propositions élémentaires en utilisant uniquement les connecteurs qui est toujours vraie (« toujours » signifiant quelles que soient les valeurs de vérité des propositions élémentaires).

Quelle que soit la pratique choisie, il est important de souligner qu'une implication vraie permet de faire une déduction dans deux situations : celle où la prémisse est vraie, celle où la conclusion est fausse. En dehors de ces deux cas, on ne peut rien conclure !

Par exemple à partir de la proposition vraie suivante : « pour tout entier naturel n , si n est divisible par 4 alors n est pair » on peut démontrer :

- Qu'un nombre qui est multiple de 4 est forcément pair (ce qui sert peu puisqu'il est plus facile de reconnaître les nombres pairs que les multiples de 4)
- Qu'un nombre qui est impair ne peut pas être un multiple de 4.

Par contre :

- Il y a des nombres pairs qui sont multiples de 4 et d'autres non.
- Il y a des nombres non multiples de 4 qui sont pairs et d'autres non.

c) Raisonnement par contraposée

L'expression « raisonnement par contraposée » peut désigner deux types de raisonnement :

- le *modus tollens*, qui est, comme nous l'avons vu, un raisonnement qui utilise une implication
- une méthode pour prouver une implication en prouvant sa contraposée (ce qui est correct puisqu'elles sont logiquement équivalentes).

Le deuxième type de raisonnement est plus rarement rencontré au collège puisque d'une façon générale, les élèves ne sont pas en situation de démontrer une implication, et encore moins d'avoir au préalable à formuler la contraposée.

d) Raisonnement par l'absurde

Le schéma du raisonnement par l'absurde est le suivant :

Je suppose NON A,
j'en déduis une contradiction,
donc A.

Notons que pour recourir à un raisonnement par l'absurde, il faut commencer par formuler la négation d'une proposition. Généralement, quand cela ne nous est pas explicitement demandé, nous n'avons pas spontanément recours à ce raisonnement : c'est souvent après un premier temps durant lequel nous avons essayé de prouver la vérité d'une proposition sans aboutir, que nous essayons alors de supposer sa négation vraie en espérant aboutir à une contradiction.

Une autre remarque importante s'impose ici. Qu'est-ce qui distingue un raisonnement par l'absurde d'un raisonnement par contraposée ? Cette question est fréquemment posée. Essayons de clarifier les choses. La différence majeure réside dans le fait que le raisonnement par l'absurde peut être utilisé pour prouver n'importe quelle proposition, alors que le raisonnement par contraposée ne concerne que des propositions sous forme d'implication. Il se trouve que dans l'enseignement

secondaire, au collège comme au lycée, dans l'écrasante majorité des cas, les propositions sont précisément des implications.

Il y a lieu de distinguer deux situations :

- *On sait que l'implication « Si A alors B » est vraie, on sait que B est fausse, et on veut prouver que A est fausse.*
 - On peut certes invoquer le modus tollens (voir plus haut) : il n'y a alors pas de raisonnement par l'absurde.
 - Mais on peut aussi raisonner comme ceci (ce que nous pratiquons couramment au collège) : on veut prouver que A est fausse ; on va raisonner par l'absurde ; supposons donc que A soit vraie ; alors, puisque l'implication « Si A alors B » est vraie, B doit être vraie ; or B a été supposée fausse : contradiction. En fait, le raisonnement par l'absurde intervient pour justifier le raisonnement par modus tollens.
- *On veut prouver l'implication « Si A alors B ».*

Trois possibilités s'offrent alors à nous :

 - Premier cas : un raisonnement direct permet de conclure : on suppose A, on démontre B, on a ainsi prouvé l'implication.
 - Deuxième cas : nous prouvons en fait la contraposée « Si NON B alors NON A ». On aura d'autant plus volontiers recours à cette méthode que l'on saura formuler aisément la contraposée !
 - Troisième cas : nous utilisons un raisonnement par l'absurde, c'est-à-dire que nous faisons l'hypothèse que la négation de cette implication est vraie, ce qui consiste à supposer que A est vraie et que B est fausse. Nous arrivons à une contradiction, ce qui prouve que la négation « A et NON B » est fausse, et donc que l'implication « Si A alors B » est vraie.

Il arrive dans le troisième cas que la contradiction vienne du fait que l'on démontre NON A, ce qui est incompatible avec l'hypothèse que A est vraie. Si nous n'avons pas utilisé l'hypothèse A, ce raisonnement par l'absurde peut alors être reformulé comme un raisonnement par contraposée.

Le raisonnement par l'absurde est privilégié au début du collège car les élèves y accèdent plus facilement. Avoir rendu familières la notion de contraposée, celle de réciproque et la distinction entre elles, est un objectif raisonnable de fin de collège. Y préparer les élèves le plus tôt possible nous semble pertinent, même si ces notions ne sont évidemment pas exigibles.

e) Raisonnement par disjonction des cas

Le schéma du raisonnement par disjonction des cas est le suivant :

A OU B, or de A je déduis C et de B je déduis C, donc C

Il peut être associé au fait que les deux propositions $[(A \Rightarrow C) \text{ ET } (B \Rightarrow C)]$ et $[(A \text{ OU } B) \Rightarrow C]$ sont logiquement équivalentes.

II. La logique au fil des cours

Bien entendu il n'est pas question d'asséner aux élèves de collège un cours de logique. Il s'agit simplement de leur faire pratiquer la logique au quotidien, de commencer à introduire en situation le vocabulaire et de développer les mécanismes liés à la formulation de la négation, de la réciproque et de la contraposée.

1) Expressions mathématiques : noms et propositions, variables

a) Écrire une définition, une propriété ou un théorème

À chaque fois que nous écrivons une définition, une propriété ou un théorème, nous écrivons des propositions. Ainsi, la découverte d'une nouvelle propriété est l'occasion de travailler sur les façons de la formuler, ce qui participe à sa compréhension (voir le document [Mathématiques et maîtrise de la langue, MENESR 2016](#) [10]).

Nous partageons maintenant avec vous les discussions que nous avons eues à propos de la formulation des définitions et des propriétés du cours d'arithmétique donné dans une classe de 3^e, en rapportant ici celles qui concernent la définition des notions de multiple et de diviseur.

Définition originale de l'enseignante :

Pour tout a , b et k entiers naturels tel que a et b sont non nuls et que $a = b \times k$.

On dit que :

a est un **multiple** de b ou a est **divisible par** b ou b est un **diviseur** de a ou b **divise** a .

Remarque : L'entier naturel k est aussi un diviseur de a (k divise aussi a , a est aussi un multiple de k et a est aussi divisible par k).

Remarque : Un nombre est toujours divisible par 1 et par lui-même

Cette définition était inspirée de celle donnée par le manuel Sésamath 3^e (2008) page 18 :

Définition

a est un entier naturel et b est un entier naturel non nul

Si $a = b \times k$ (ou $a \div b = k$) où k est un entier naturel

alors **a est un multiple de b** ou **a est divisible par b** ou **b est un diviseur de a** ou **b divise a .**

Dans la formulation du manuel Sésamath, la formulation « où k est un entier » masque une quantification existentielle. Une telle formulation fait partie du langage couramment utilisé par les mathématiciens, mais n'est pas forcément explicite pour les élèves. Nous préférons utiliser explicitement un quantificateur existentiel.

Dans la proposition originale de l'enseignante, les trois variables étaient quantifiées universellement, mais cette formulation pose problème : les mots définis ne portent en fait que sur a et b , la variable k n'est introduite que pour établir leur définition. Il y a une différence de statut entre les variables a , b et k , nous avons donc choisi de sortir la

présentation des variables a et b de l'encadré, et de les introduire avec l'expression « soit... »⁷. La variable k par contre est introduite dans la définition, mais c'est une variable muette (voir définition page 9).

Par ailleurs, l'utilisation de l'expression « si... alors... » dans la définition du manuel Sésamath nous paraît malheureuse, car il ne s'agit évidemment pas d'une implication.

Nous avons également discuté du fait de prendre a et b non nuls : en 6^e, la divisibilité est introduite à partir de la division euclidienne, la division euclidienne de a par b étant définie pour a quelconque et b non nul. Nous avons pourtant choisi de prendre a et b quelconques pour la définition de multiple, qui ne nécessite aucune restriction, mais de restreindre la définition de divisible au cas où b est non nul pour rester cohérent avec ce qui est fait en 6^e, même si ce choix implique le « dédoublement » de certaines propriétés, selon qu'on les formule en termes de diviseur ou de multiple.

Définition 1 après commentaires

Soient a, b des entiers naturels

On dit que a est un multiple de b quand il existe un entier naturel k tel que $a = bk$.

Dans ce cas, lorsque b n'est pas nul, on dit aussi **a est divisible par b** ou **b est un diviseur de a** ou **b divise a** .

Nous n'hésitons pas non plus à faire explicitement apparaître les quantifications universelles dans les propriétés :

Propriété: pour tout k, a et b entiers naturels,

si a et b sont des multiples de k alors $(a+b)$ et $(a-b)$ sont aussi des multiples de k .

Propriété: pour tout k, a et b entiers naturels, k non nul

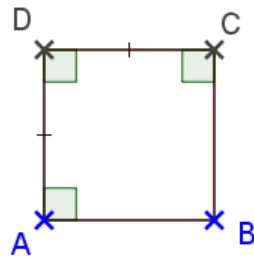
si k divise a et b alors k divise $(a+b)$ et $(a-b)$.

b) À question différente, réponse différente

Il est important d'expliquer aux élèves ce qui est attendu en fonction de la forme de la question qu'on leur pose. Il leur arrive en particulier d'être confrontés à deux types d'activités concernant les propositions : d'une part évaluer une proposition (est-elle vraie ou fausse ?), d'autre part produire des propositions. Nous allons voir que dans ce deuxième cas, il n'est pas seulement attendu qu'ils donnent une proposition vraie...

⁷ L'utilisation du « soit » est peu courante dans les manuels pour le collège, malheureusement, de ce fait, les variables ne sont plus introduites et le statut de ces lettres n'est pas clair. D'autres expressions sont possibles, : « considérons deux entiers naturels a et b », « étant donné deux nombres entiers a et b »...

À une question ouverte du type : « quelle est la nature de la figure suivante ? »



La réponse attendue est « un carré » parce que nous attendons la réponse qui donne le maximum d'information. Les élèves y sont habitués, mais il n'est pas inutile de rappeler régulièrement le contrat associé à de telles questions : non seulement donner une proposition vraie, mais donner celle qui donne le maximum d'informations.

Avec une question type Vrai/Faux, les élèves devraient répondre vrai aux quatre affirmations suivantes :

- « la figure est un carré »
- « la figure est un rectangle »
- « la figure est un losange »
- « la figure est un parallélogramme »

Cependant, il arrive fréquemment que des élèves répondent faux pour les trois dernières propositions.

Avec une question type QCM comme ci-dessous, quel est l'attendu pour une question du type « Quel nom de figure correspond au schéma proposé » ?

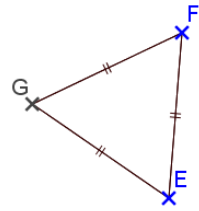
Schéma	A	B	C	D
	carré	rectangle	losange	parallélogramme

Attendons-nous une unique réponse (celle qui donne le maximum d'information) ou plusieurs (toutes celles pour lesquelles c'est Vrai) ?

Il est important de préciser la question et d'expliquer la différence aux élèves car ce genre d'ambiguïté se rencontre régulièrement dans les QCM. Nous donnons ci-dessous d'autres exemples :

- Combien un rectangle a-t-il d'angles droits ?
« Un rectangle a 3 angles droits » est vraie même si un rectangle a exactement 4 angles droits. On peut d'ailleurs remplacer 3 par 2 ou par 1. La confusion est d'autant plus grande chez les élèves quand on définit un rectangle comme un quadrilatère à trois angles droits. Le principe de la définition minimale s'oppose pour eux à celui du maximum d'information.

- Le triangle ci-contre est équilatéral (maximum d'information), mais dire qu'il est isocèle est vrai. On insiste d'ailleurs en cours sur le fait qu'il est trois fois isocèle pour justifier certaines propriétés, par exemple l'existence de trois axes de symétrie. Comment évaluer la réponse « il est isocèle » d'un élève à qui on demanderait la nature de ce triangle ?



- « Quelle est la nature de la fonction f définie par : pour tout nombre x , $f(x) = 5x$ » ? La réponse « elle est affine » est correcte même si le maximum d'information attendu lors d'une question ouverte est « la fonction f est linéaire ». D'ailleurs, au lycée, avec l'arrivée d'autres fonctions, la distinction linéaire / affine induite par l'approche des fonctions par des situations de proportionnalité s'estompe et les enseignants ne parlent rapidement plus que de fonctions affines.

Finalement, il y a derrière toutes ces situations un même schéma : une propriété P est « plus forte » qu'une propriété P' , au sens où l'implication $P \Rightarrow P'$ est toujours vraie. Tout objet possédant la propriété P possède alors également la propriété P' et, l'inverse n'étant pas forcément vrai, il paraît plus pertinent de donner la propriété P , qui comporte davantage d'information.

La question du principe du maximum d'information pourra être travaillée à plusieurs occasions : au fil des cours lors de l'utilisation d'inégalités larges page 31, dans l'activités Sacs de boule page 49.

c) Expression littérale

La notion d'expression littérale, et plus généralement le travail algébrique, est une occasion pertinente de parler de noms, de propositions (sans forcément utiliser ces termes avec les élèves), et de variables.

Nous avons constaté à ce propos dans les manuels une grande confusion entre noms et propositions. **Une expression littérale est produite lorsque nous effectuons une suite d'opérations sur des nombres et des variables représentées par des lettres**⁸. Par exemple, partir de 2, ajouter a , multiplier par 5 se traduit par l'expression littérale $(2+a) \times 5$. Une expression littérale est donc un nom. Dans plusieurs manuels, il y a une confusion car les exemples d'expressions littérales qui sont donnés le sont avec une égalité dont le statut n'est pas très clair. Par exemple, dans le manuel Dimension Cycle 4 page 142 (Hatier, 2016) [11] : « L'aire \mathcal{A} du rectangle ci-contre est donnée par l'expression littérale $\mathcal{A} = L \times l$. », dans le manuel Delta Cycle 4 page 144 (Belin, 2016) [12] : « Le prix de n stylos à 2,7 € l'unité s'exprime en fonction de la

⁸ Ce qui est en gras dans ce paragraphe peut, selon nous, être écrit dans un cahier d'élève.

variable n : $p = 2,7 \times n = 2,7n$ ». Ces exemples peuvent donner à penser qu'une expression littérale est une égalité, nous préférons écrire « L'aire \mathcal{A} du rectangle ci-contre est donnée par l'expression littérale $L \times \ell$. On écrira $\mathcal{A} = L \times \ell$. »

Certaines conventions permettent de simplifier l'écriture d'une expression littérale : on écrit ab à la place de $a \times b$, $5c$ à la place de $c \times 5$ (nous n'utilisons volontairement pas l'égalité pour introduire ces conventions d'écriture car nous n'avons pas encore parlé d'égalité entre deux expressions littérales).

Une égalité entre deux expressions littérales est une proposition qui contient une ou plusieurs variables libres (en fait, toutes les variables sont libres). Par exemple :

$$(2 + a) \times 5 = 7a - 4$$

Nous souhaitons amener les élèves à comprendre que face à une telle égalité, nous pouvons nous poser plusieurs questions :

- Sont-elles égales pour toutes les valeurs des variables ? Jamais égales ?
- Sont-elles parfois égales et si oui pour quelles valeurs des variables ?

Pour marquer ces différences, il est important d'être précis sur le vocabulaire.

Lorsque nous attribuons une valeur numérique aux variables d'une expression littérale, nous obtenons une expression numérique et il est possible d'effectuer les opérations pour calculer la valeur de cette expression. Par exemple, pour $a = 7$, l'expression $(2+a) \times 5$ prend la valeur à $(2+7) \times 5$, c'est-à-dire 45. Nous n'employons pas forcément le terme « expression numérique » avec les élèves, mais pas contre nous faisons attention dans notre discours à bien distinguer les deux. Par exemple l'expression « Calcul d'une expression littérale » trouvée dans le manuel Delta, est particulièrement maladroite, c'est l'expression numérique qu'on calcule. Nous utiliserons plutôt « calcul de la valeur de l'expression littérale » ou « évaluation de l'expression littérale » en précisant bien « pour telles valeurs des variables ».

Quand les deux expressions numériques obtenues en évaluant deux expressions littérales pour les mêmes valeurs de variables sont égales, nous dirons que les deux expressions littérales sont égales pour telles valeurs des variables. Par exemple comme $7 \times 7 - 4$ est aussi égale à 45, les expressions $(2 + a) \times 5$ et $7a - 4$ sont égales pour $a = 7$.

Deux expressions littérales sont dites égales (tout court !) lorsque les expressions numériques correspondantes sont égales quelles que soient les valeurs attribuées aux variables. Nous voyons qu'une difficulté est de distinguer « les expressions sont égales » et « les expressions sont égales pour telles valeurs des variables ».

Par exemple, les expressions $(2 + a) \times 5$ et $7a - 4$ sont égales pour $a = 7$ mais ne sont pas égales par contre les expressions $(2 + a) \times 5$ et $5a + 10$ sont égales.

Les quantificateurs nous permettent de bien marquer cette différence : deux expressions littérales, par exemple $A[x]$ ⁹ et $B[x]$, sont égales si la proposition « pour tout réel x , $A[x] = B[x]$ » est vraie.

S'il existe un réel a tel que les expressions soient égales pour $x = a$, alors la proposition « il existe un réel x tel que $A[x] = B[x]$ » est vraie.

Nous proposons dans la partie suivante une activité autour de la démonstration de telles propositions quantifiées (voir activité Calcul littéral et quantification page 68).

Quand nous cherchons les valeurs des variables pour lesquelles deux expressions littérales sont égales, nous regardons alors l'écriture $A[x] = B[x]$ comme une équation. Résoudre cette équation consiste à déterminer les valeurs, ici de la variable x , pour lesquelles l'égalité est vraie. Pour cela, nous écrivons une suite d'égalités entre expressions algébriques (littérales ou numériques) qui sont vraies exactement pour les mêmes valeurs des variables, c'est-à-dire que nous écrivons une suite de propositions équivalentes. Au collège, on parvient en généralement facilement à une dernière égalité de la forme $x = a$, il est donc très facile de trouver la valeur de x pour laquelle $A[x] = B[x]$ est vraie.

2) Négation : formuler la négation d'une proposition

Pour pouvoir avoir recours à des raisonnements par l'absurde ou par contraposée, il est nécessaire de pouvoir formuler aisément la négation d'une proposition. Mais d'une façon plus générale, cela aide à mieux comprendre la signification des propositions auxquelles on a affaire. Ce travail peut être commencé dès le collège, et associant le plus souvent possible une proposition dont on se demande si elle est vraie à sa négation. Par exemple, en 6^e, pour un segment $[AB]$ donné, nous pouvons étudier la conjecture « tout point équidistant des extrémités du segment $[AB]$ est sur sa médiatrice »¹⁰. L'enseignant peut alors demander comment il serait possible de démontrer qu'elle est fautive, et écrire à partir des réponses des élèves la proposition « il existe un point équidistant des extrémités du segment $[AB]$ qui n'est pas sur sa médiatrice », qui est la négation de la conjecture étudiée. L'une ou bien l'autre est vraie, reste à démontrer laquelle.

En familiarisant ainsi les élèves avec la notion de négation, il devient rapidement possible de leur demander explicitement de formuler des négations, comme c'est proposé dans l'activité Divisibilité (page 59).

⁹ Nous utilisons la notation entre crochets pour ne pas confondre avec la notation fonctionnelle.

¹⁰ Dans cette formulation, nous avons « sorti » la quantification universelle sur le segment $[AB]$ de la conjecture, pour ne pas la surcharger en quantification. Mais bien sûr, le résultat important est que « quels que soient les points A et B , tout point équidistant des extrémités du segment $[AB]$ est sur sa médiatrice ».

La formulation de la négation d'une proposition peut se faire de façon d'autant plus mécanique que la proposition est formulée dans un langage formalisé. Pour l'exemple donné dans le paragraphe précédent, la formulation de la négation ne peut pas se faire seulement en appliquant des règles. Par contre, la négation de cette même proposition exprimée sous la forme « pour tout point M, si $MA = MB$ alors M appartient à la médiatrice de [AB] » peut se faire de façon automatisée par quelqu'un qui connaît les règles de formulation de la négation (voir page 12 pour la négation de l'implication et page 17 pour la négation d'une proposition universellement quantifiée). Formaliser le langage que nous utilisons et proposer des automatismes aux élèves n'est pourtant cependant pas la voie que nous suggérons. Au contraire, la négation est une occasion de se questionner sur le sens de certaines expressions courantes, comme nous le faisons par exemple avec la formulation « tous ne sont pas... » dans les activités Sacs de boules (page 47) et Quadrilatères (page 51). C'est aussi l'occasion de distinguer négation et contraire. Par exemple, plusieurs élèves proposent comme négation de « tous les rectangles sont des carrés » la proposition « aucun rectangle n'est un carré » avec cette idée que le contraire de « tous » c'est « aucun ». Et effectivement, l'idée de contraire comporte l'idée d'opposition, comme la négation, mais l'idée d'opposition la plus extrême ¹¹ (le contraire de « être blanc » ça n'est pas « ne pas être blanc », c'est « être noir »). Or en mathématiques, cette idée d'opposition « extrême » n'a pas de sens, la seule opposition qui compte, c'est celle des valeurs de vérité. Or ici, la proposition « tous les rectangles sont des carrés » est fausse, mais la proposition « aucun rectangle n'est un carré » est fausse aussi (ce qu'il n'est jamais inutile de rappeler au collège...). Elles ne peuvent donc pas être négation l'une de l'autre.

3) Conjonction et disjonction

a) Définition du milieu d'un segment

Il peut être intéressant de commencer dès la classe de 6^e à expliciter le sens du ET et le passage à sa négation. La définition du milieu d'un segment se prête bien à un travail sur le ET. En effet le milieu peut être défini de la façon suivante :

Définition : le milieu d'un segment est le point **qui appartient à ce segment ET qui est équidistant de ses extrémités.**

Nous proposons ensuite un exercice avec plusieurs schémas, représentant une ou des configurations géométriques où un point est ou n'est pas le milieu d'un segment. Les élèves doivent alors dire si les points sont milieux ou non en justifiant leur réponse.

¹¹ Voir la définition du Centre National de Ressources Textuelles et Lexicales : <http://www.cnrtl.fr/definition/contraire>

La discussion qui doit s'instaurer entre les élèves et l'enseignant lors de la correction devraient permettre de conduire à une formulation de la règle suivante :

Si un point **n'appartient pas à un segment** OU **n'est pas équidistant des extrémités d'un segment** alors il n'est pas le milieu de ce segment.

Cet exercice est adapté d'un exercice de la brochure [« Fiches du professeur 6^e. »](#) de l'IREM de BREST [13]

	Mle milieu de [EF].
	Mle milieu de [EG]
	Mle milieu de [FG]
	M est des points E, F et G.

Nous l'avons adapté en demandant aux élèves de justifier leurs réponses.

Enoncé modifié :

<p>Considérons la figure ci-contre. Complète les affirmations ci-dessous par « est » ou par « n'est pas »</p>	
---	--

Affirmation	Justification
Mle milieu de [EF].	
Mle milieu de [EG]	
Mle milieu de [FG]	
Fle milieu de [EA]	

Correction :

Affirmation	Justification
M est le milieu de [EF].	$M \in [EF]$ ET $ME = MF$
M n'est pas le milieu de [EG]	$M \notin [EG]$
M n'est pas le milieu de [FG]	$M \notin [FG]$
F n'est pas le milieu de [EA]	$EF \neq AF$

b) Inégalités larges et principe du maximum d'information

Le caractère inclusif du OU ne pose pas forcément problème aux élèves une fois qu'il est explicité. Par contre, certains continuent à avoir du mal à accepter qu'une proposition telle que $2 \leq 3$ est vraie, encore une fois à cause du principe du maximum d'informations. En effet, les élèves savent très bien que la proposition $2 < 3$, qui est « plus forte » (au sens déjà défini page « plus forte » 26) que $2 \leq 3$, est vraie, et ils remettent alors en question la vérité de la première.

c) ET/OU et équations produits

Lors de la résolution d'une équation produit, par exemple pour $(x - 2)(x - 4) = 0$, nous écrivons souvent successivement « $x = 2$ ou $x = 4$ », puis « les solutions de l'équation sont 2 et 4 ». Cette reformulation, avec transformation d'un « ou » en « et », peut laisser les élèves perplexes. Dans la première proposition, le *ou* est bien un connecteur logique OU entre deux propositions. Par contre, dans la deuxième, le *et* n'est pas un connecteur logique ET : il ne s'agit pas de la conjonction logique des deux propositions « La solution de l'équation est 2 » et « La solution de l'équation est 4 ». Ce *et* est une conjonction de coordination qui relie les deux éléments qui sont sujets du prédicat binaire « les solutions de l'équation sont... »

d) Disjonction, négation et les expressions « au plus », « au moins », « ... ou plus », « ...ou moins », ...

Objectifs :

L'arrivée des inégalités larges avec les regroupements par classe en statistique ainsi que le vocabulaire employé « au plus », « au moins », « ... ou plus », « ...ou moins », « strictement inférieur » / « strictement supérieur », « inférieur ou égal » / « supérieur ou égal » sont sources de grandes confusions chez les élèves.

Dans le cadre de l'exercice de statistiques en classe de 5^e présenté ci-après, une question, la question 3, a été ajoutée pour travailler ces questions de vocabulaire et de logique liées aux inégalités larges et strictes. Elle met en jeu les connecteurs logiques ET, OU et NON (voir page 11). Le travail sur cette question a duré une trentaine de minutes dont quinze en groupes de 3 ou 4 élèves et quinze pour la mise en commun. Lors d'une telle séance, le travail des groupes est assez animé.

L'énoncé complet est donné ci-après pour situer le cadre de la question 3 qui est la seule pour laquelle nous proposons un scénario de correction.

Énoncé :

1. Voici les notes de 26 élèves de 5^e à un contrôle : 11 ; 17 ; 17 ; 8 ; 16 ; 6 ; 15 ; 12 ; 8 ; 14 ; 5 ; 15 ; 12 ; 7 ; 7 ; 4 ; 9 ; 6 ; 12 ; 11 ; 10 ; 16 ; 14 ; 13 ; 16 ; 9

Regrouper ces données dans un tableau.

Est-ce clair et lisible ?.....

Peut-on rapidement tirer des conclusions quant à la réussite de ce contrôle ?.....

2. Pour faciliter les commentaires on regroupe les données par classes : $0 < \text{note} \leq 5$, $5 < \text{note} \leq 10$, $10 < \text{note} \leq 15$, $15 < \text{note} \leq 20$.

Faire le tableau correspondant.

Classe	$0 \leq \text{note} \leq 5$	$5 < \text{note} \leq 10$	$10 < \text{note} \leq 15$	$15 < \text{note} \leq 20$	Total
Effectif					
Fréquence					
Fréquence en %					

Compléter la colonne total.

Dans un cas de regroupement par classe on parle d'effectif et de fréquence de classe. Quel est l'effectif (et la fréquence) des élèves ayant obtenu entre 5 et 10 à ce contrôle ?

.....

Quel est l'effectif total de la classe ?.....

Compléter le reste du tableau.

Quels sont les avantages et les inconvénients de ce type de regroupement ?.....

.....

3. Questions :

Combien d'élèves ont :

- au moins 10 ?
- au plus 10 ?
- moins de 10 ?
- plus de 10 ?
- 10 ou moins ?
- 10 ou plus ?
- une note strictement inférieure à 10 ?
- une note strictement supérieure à 10 ?
- une note inférieure ou égale à 10 ?
- une note supérieure ou égale à 10 ?

Scénario de correction :

Nous commençons par mettre en commun les réponses des différents groupes.

Nous faisons identifier aux élèves les propositions « qui veulent dire la même chose » (équivalentes) et attribuons une lettre à chaque groupe de propositions pour les identifier plus facilement...

Combien d'élèves ont :

- « au moins 10 ? » → a
- « au plus 10 ? » → b
- « moins de 10 ? » → c
- « plus de 10 ? » → d
- « 10 ou moins ? » → b
- « 10 ou plus ? » → a
- une note « strictement inférieure à 10 ? » → c
- une note « strictement supérieure à 10 ? » → d
- une note « inférieure ou égale à 10 ? » → b
- une note « supérieure ou égale à 10 ? » → a

En partant du carré ci-après avec les parties grises vierges, nous faisons établir aux élèves les relations entre les propositions en leur demandant lesquelles :

- Sont négations l'une de l'autre
- Peuvent être vraies en même temps
- Peuvent être fausses en même temps
- Ne peuvent être vraies en même temps
- Ne peuvent être fausses en même temps

Lors de cette discussion les élèves doivent justifier leurs réponses et donner des exemples.

Le carré ci-dessous leur est ensuite distribué :

a. « au moins 10 » « 10 ou plus » une note « supérieure ou égale à 10 » $10 \leq \text{note}$	Négation l'une de l'autre	c. « moins de 10 » « une note strictement inférieure à 10 » $\text{note} < 10$
- Peuvent être vraies en même temps (si note = 10) - Ne peuvent pas être fausses en même temps		- Ne peuvent pas être vraies en même temps - Peuvent être fausses en même temps (si note = 10)
b. « au plus 10 » « 10 ou moins » une note « inférieure ou égale à 10 » $10 \geq \text{note}$	Négation l'une de l'autre	d. « plus de 10 » « une note strictement supérieure à 10 » $\text{note} > 10$

4) Implication

a) Formulation en « Si ... alors ... »

La formulation des propriétés en « si...alors... » est très courante en mathématiques, mais vues les difficultés des élèves avec l'implication, nous pouvons légitimement nous demander si c'est la plus pertinente au collège. Rarement explicitement universellement quantifiée, elle a notamment l'inconvénient de masquer cette quantification (comme dans « si un parallélogramme a ses diagonales de même longueur, alors c'est un rectangle »), par contre explicite dans des formulations telles que « tous les x qui vérifient $A[x]$ vérifient $B[x]$ » (comme dans « tous les parallélogrammes qui ont leurs diagonales de même longueur sont des rectangles »). Notre proposition n'est pas de bannir les formulations en « si...alors... », mais de varier les formulations, ce qui arrivera naturellement si les élèves ont régulièrement comme tâche d'en proposer eux-mêmes (l'enseignant pourra alors proposer la formulation en « si...alors... » si elle n'est pas proposée par les élèves).

b) Réciproque du théorème de Thalès

La formulation en « si...alors... » a l'avantage de faciliter la formulation de la réciproque d'une implication, moyennant les adaptations nécessaires pour qu'elle soit formulée correctement, nous en avons déjà parlé (page 14). Notons cependant que la « réciproque » peut aussi être formulée à partir d'une formulation du type « tous les x qui vérifient $A[x]$ vérifient $B[x]$ », sous la forme « tous les x qui vérifient $B[x]$ vérifient $A[x]$ » (par exemple, la « réciproque » de « tous les parallélogrammes qui ont leurs diagonales de même longueur sont des rectangles » est « tous les parallélogrammes qui sont des rectangles ont leurs diagonales de même longueur », c'est-à-dire plus simplement « tous les rectangles ont leurs diagonales de même longueur ». Encore une fois, nous défendons l'idée que ces jeux de formulation et reformulation participent à la compréhension des propriétés des objets.

C'est une démarche courante en mathématiques, lorsque nous avons prouvé un théorème en « si...alors... », de se demander si la réciproque est vraie. Nous pouvons donc installer cette pratique dans la classe, sans y chercher d'autres justifications que d'installer une culture de travail mathématique.

Il nous paraît important de souligner que la célèbre réciproque du théorème de Thalès telle que nous la présentons en général aux élèves n'en est pas une ! Regardons par exemple la formulation du manuel Dimension [11] page 418 :

Théorème Si (DB) et (EC) sont deux droites sécantes en A avec (BC) et (DE) parallèles, alors on peut écrire les égalités :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} \quad ^{12}$$

Une application stricte de la définition de la réciproque donnerait :

Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$, alors (DB) et (EC) sont deux droites sécantes en A avec (BC) et (DE) parallèles.

Or, ce n'est pas du tout ce que propose ce manuel page 458 !

Propriété (d) et (d') sont deux droites sécantes en O.

A et B sont deux points de (d) distincts de O. M et N sont deux points de (d') distincts de O avec A, B, O, et M, N, O alignés dans le même ordre.

Si $\frac{OA}{OB} = \frac{OM}{ON}$, alors (AM) et (BN) sont parallèles.

Revenons au théorème direct : nous voyons déjà que la proposition « (DB) et (EC) sont deux droites sécantes en A » et la proposition « (BC) et (DE) parallèles » n'ont pas le même statut. La première pose le contexte, la deuxième pose la prémisse du théorème. Il nous paraît alors préférable de dire :

Quels que soient les points A, B, C, D et E tels que les droites (DB) et (EC) sont sécantes en A,

Si (BC) et (DE) sont parallèles alors $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$.

Reformulons alors la réciproque :

Quels que soient les points A, B, C, D et E tels que les droites (DB) et (EC) sont sécantes en A,

Si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ alors (BC) et (DE) sont parallèles.

Cette réciproque est fautive : en effet, si les points A, B, D et A, C, E ne sont pas alignés dans le même ordre, même la double égalité ne suffit pas à ce que les droites soient parallèles (il est par contre possible de prouver le théorème « Quels que soient les points A, B, C, D et E tels que les droites (DB) et (EC) sont sécantes en A,

si $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$ alors (BC) et (DE) sont parallèles ou les droites (DB) et (EC) sont perpendiculaires », mais cette étude est trop difficile à la fin du collège).

¹² Cette formulation proche de celle trouvée dans la plupart des manuels, est l'occasion de parler de la double égalité : $X = Y = Z$ équivaut à $X = Y$ ET $Y = Z$.

Faut-il alors bannir le nom « réciproque du théorème de Thalès » ? Non, mais justement expliciter le travail mathématique qui nous conduit à formuler cette propriété en faisant quelques arrangements vis-à-vis de réciproque stricte (dont on peut montrer qu'elle est fautive) : tout d'abord, ce qui nous intéresse c'est de pouvoir conclure au parallélisme, ce qui est impossible si A, B, D et A, C, E ne sont pas alignés dans le même ordre, donc il est cohérent de rajouter cette hypothèse. Ensuite, avec cette condition supplémentaire, la « réciproque » est vraie, mais une égalité seulement étant suffisante, on préférera la « réciproque » telle que nous la connaissons.

Reste à noter que la réciproque donnée aux élèves, à une adaptation près, est plus proche de la réciproque du théorème de Thalès tel que vu par Euclide (voir annexe page 87) (<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k68013q/f220>) :

Livre VI, Théorème 2. Proposition 2 :

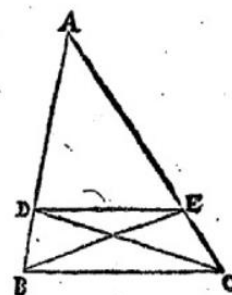
Si on meine vne lignedroicte parallele à l'vn des costez d'un triangle, laquelle coupe les deux autres costés ; elle les coupera proportionnellement : & si deux costés d'un triangle sont coupeez proportionnellement, la ligne coupante sera parallele à l'autre costé.

Si on mène une ligne droite parallèle à l'un des côtés d'un triangle, laquelle coupe les deux autres côtés, elle les coupera proportionnellement. Et si les deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, la ligne coupante sera parallèle à l'autre côté. »

Dans ce paragraphe, Euclide énonce le théorème direct portant sur une simple égalité, et sa réciproque.

En effet, dans la démonstration d'Euclide, les conditions d'application du théorème direct sont donc :

- Un triangle délimité par trois lignes droites (segments) [AB], [BC], et [CA] ;
- Une ligne droite [DE] parallèle à la ligne droite [BC] coupant [AB] en D et [AC] en E.



La conclusion donnée est : « AD fera à DB ce que AE est à EC. »

Autrement dit, en écriture mathématique actuelle $\frac{BD}{DA} = \frac{CE}{EA}$, ce qui en ajoutant de part et d'autre du signe égal $\frac{DA}{DA} = 1 = \frac{EA}{EA}$ revient à $\frac{BA}{DA} = \frac{CA}{EA}$.

Il est tout à fait possible d'expliquer aux élèves notamment en utilisant des démonstrations animées (voir le site Mathkang.org ou celui de [Thérèse Eveilleau](#) [14]) que le théorème direct qui leur est proposé est « enrichi » en terme de conséquences grâce aux connaissances sur les triangles semblables alors que la réciproque, elle, a

été conservée « telle qu'elle » puisqu'une seule égalité suffit pour conclure au parallélisme.

5) Équivalence : la formulation des propriétés caractéristiques

Les élèves rencontrent des propriétés caractéristiques dès le cycle 3, par exemple avec les critères de divisibilité, mais l'expression « propriété caractéristique » n'apparaît ni dans les programmes de cycle 3, ni dans ceux de cycle 4. La plupart du temps dans les manuels, ces propriétés sont proposées sous forme de deux implications. Il nous paraît dommage de ne pas souligner que certaines propriétés sont caractéristiques (c'est-à-dire que l'équivalence est vraie), ne serait-ce que pour pouvoir également souligner que d'autres ne le sont pas. Par exemple, avoir deux diagonales de même longueur ne caractérise pas l'ensemble des rectangles, n'en déplaise à certains élèves !

Par contre, nous ne préconisons pas d'utiliser la formulation « si ... et seulement si ... » à l'écrit, en tout cas pas avant la fin du cycle 4. Or il n'est pas toujours aisé de trouver des formulations claires pour les élèves pour exprimer une équivalence. Nous proposons ci-après quelques exemples de formulations qui utilisent la notion d'ensemble ou l'expression « être exactement ... ».

Même si cette notion de propriété caractéristique est importante à faire comprendre et doit à notre avis être explicitée, nous choisissons pourtant de bien différencier, à partir de la classe de 5^e, théorème direct, théorème réciproque et contraposée lors de l'étude de propriétés caractéristiques (théorème des angles alternes internes page 39...). Nous pensons ainsi les aider à distinguer les prémisses (au sens de ce qu'ils savent) des conclusions (au sens de ce qu'ils doivent démontrer) quand ils les utilisent.

a) Critères de divisibilité

En primaire dès le cycle 3 il est possible de commencer à aborder la notion de propriété caractéristique avec les multiples de 10 par exemple.

« Les multiples de 10 sont les nombres qui se terminent par zéro »

- Si un nombre est un multiple de 10 alors il se termine par zéro.
- Si un nombre se termine par zéro alors c'est un multiple de 10.

Autrement dit :

- L'ensemble des multiples de 10 est l'ensemble de tous les nombres entiers qui se terminent par zéro

Ou encore :

- Les multiples de 10 sont exactement les nombres qui se terminent par zéro

Cette notion peut bien entendu être travaillée sur tous les critères de divisibilité abordés en cycle 3.

En cycle 4 on pourra retravailler la notion en évoquant également des propriétés qui ne sont pas caractéristiques. On pourra par exemple chercher à caractériser la divisibilité par 6, par 10, par 12... (activité divisibilité page 59).

Dans un certain nombre de manuels, les critères de divisibilité sont énoncés avec la formulation « un nombre est divisible par ... si ... », c'est-à-dire sous la forme d'une implication et non d'une équivalence :

Un nombre entier est :

Divisible par 2, si son chiffre des unités (le dernier chiffre) est 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair)

Divisible par 5, si son chiffre des unités (le dernier chiffre) est 0 ou 5

Divisible par 10, s'il se termine par 0

Divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3

Divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9

Divisible par 4, si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4

Nous avons alors choisi de les présenter en illustrant d'abord cette notion de propriété caractéristique en soulignant la double implication sur un exemple de critère de divisibilité, puis de présenter l'ensemble des critères sous la forme d'un tableau :

Les critères de divisibilité par 2, 3, 5, 9, 10 et 4 sont ce qu'on appelle des propriétés caractéristiques.

Par exemple :

- Si un nombre entier est divisible par 2 alors son chiffre des unités (le dernier chiffre) est 0, 2, 4, 6 ou 8.
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8, alors ce nombre est divisible par 2.

Autrement dit, pour tout nombre entier, la propriété de se terminer par 0, 2, 4, 6 ou 8 caractérise les entiers divisibles par 2. Non seulement c'est une propriété de tous les nombres divisibles par 2 mais en plus elle permet de les reconnaître.

Dans le tableau ci-dessous, la propriété énoncée dans la colonne 1, qui concerne une variable n désignant un entier naturel, est équivalente à celle énoncée dans la colonne 2 se trouvant sur la même ligne.

Propriété	Propriété caractéristique
n est divisible par 2	n a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6 ou 8 (nombre pair)
n est divisible par 5	n a pour chiffre des unités 0 ou 5
n est divisible par 10	n se termine par 0
n est divisible par 3	la somme des chiffres de n est divisible par 3
n est divisible par 9	la somme des chiffres de n est divisible par 9
n est divisible par 4	le nombre formé par les deux derniers chiffres de n est divisible par 4

b) Médiatrice

La médiatrice, elle aussi peut-être travaillée en 6^e.

- Tous les points de la médiatrice d'un segment sont équidistants de ses extrémités
- Tous les points équidistants des extrémités d'un segment appartiennent à sa médiatrice

Autrement dit :

- La médiatrice d'un segment est l'ensemble de tous les points équidistants de ses extrémités.

Ou encore :

- Les points de la médiatrice d'un segment sont exactement les points équidistants de ses extrémités.

c) Angles alternes internes et parallélismes

En 5^e lors du chapitre sur sécante et parallélisme il est souhaitable d'explicitier en détail les propriétés suivantes pour faire comprendre aux élèves.

Pour tout couple de droites coupées par n'importe quelle sécante.

1. Propriété : Si les droites sont parallèles alors les angles alternes internes ont la même mesure.
2. Propriété contraposée : Si les angles alternes internes n'ont pas la même mesure alors les droites ne sont pas parallèles.
3. Propriété réciproque : Si les angles alternes internes ont la même mesure alors les droites sont parallèles.

Pour cette propriété nous n'avons pas trouvé de formulation simple de l'équivalence sans l'expression « si ... et seulement si ... ». On peut alors se contenter d'une remarque qui souligne l'aspect caractéristique : « Comme la propriété et sa réciproque sont toujours vraies on parle de propriété caractéristique : cette propriété permet de caractériser, et donc de reconnaître, les droites parallèles. »

Mais on peut aussi à cette occasion introduire l'expression « si ... et seulement si ... » sans pour autant la rendre exigible : On pourra aussi regrouper la propriété et sa réciproque dans la phrase suivante « Les droites sont parallèles si et seulement si les angles alternes internes ont la même mesure ».

Dans les démonstrations utilisant le théorème il est important de faire remarquer à chaque fois aux élèves le sens utilisé pour leur faire travailler la distinction prémisses / conclusion.

6) Quantificateurs : quantification universelle dans les propriétés

La plupart des propriétés que les élèves apprennent au collège sont des « énoncés universels », c'est-à-dire que lorsqu'elles sont formulées avec des variables, une quantification universelle porte sur chacune de ces variables. Or l'expression de cette quantification universelle est non seulement très souvent implicite, mais en plus elle diffère souvent d'une propriété à une autre. Nous nous servons d'extraits du manuel Dimension [11] pour illustrer notre propos.

Nous y trouvons par exemple une première propriété sur les fractions page 37 :

Propriété : Lorsqu'on multiplie (ou divise) le numérateur et le dénominateur d'une fraction par un même nombre non nul, on obtient une fraction qui lui est égale.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}, (b \neq 0, k \neq 0)$$

Cette propriété est d'abord formulée sans variables. Puis il y a une égalité avec des variables a , b et k qui ne sont pas « introduites » : nous ne savons pas quel type de nombres elles désignent (c'est-à-dire à quel ensemble elles sont astreintes), ni si elles sont ou non quantifiées. C'est alors parce que nous savons qu'il s'agit d'une reformulation de la propriété déjà énoncée, que nous pouvons correctement interpréter ce qui est écrit comme :

Quels que soient les nombres entiers¹³ a , $b \neq 0$ et $k \neq 0$, $\frac{a}{b} = \frac{a \times k}{b \times k}$

¹³ Puisqu'on parle de fraction dans l'énoncé de départ, les variables sont astreintes à l'ensemble des entiers même cela n'y est pas précisé et bien que la proposition reste bien évidemment vraie avec des variables astreintes à l'ensemble des réels.

Sur la même page, deux propriétés permettant de comparer des fractions sont formulées :

Propriété : a et b sont deux nombres positifs, avec b non nul. La fraction $\frac{a}{b}$ est :

- Inférieure à 1 lorsque son numérateur est plus petit que son dénominateur
- Supérieure à 1 lorsque son numérateur est plus grand que son dénominateur

Propriété : Si deux fractions ont un même dénominateur positif, alors la plus grande est celle qui a le plus grand numérateur.

Pour la première propriété, des variables sont introduites, mais pas quantifiées, même si bien sûr nous devons lire cette propriété avec une quantification universelle. Cependant, les variables servent à « nommer » la fraction $\frac{a}{b}$, mais elles ne sont pas utilisées ensuite puisqu'il est question de « son numérateur » et « son dénominateur ». La deuxième propriété est formulée sans variables, et sans aucun terme exprimant explicitement qu'il s'agit d'un énoncé universel.

Plus loin dans ce manuel (page 142), nous pouvons lire une propriété formulée avec une quantification universelle explicite :

Propriété : Pour tous nombres a , b et k , on a $k(a + b) = ka + kb$

Toutes ces formulations sont bien sûr « correctes », et même font partie des formulations couramment produites en mathématiques. Nous voudrions cependant souligner, parce que cela nous paraît dommageable pour la compréhension d'élèves du collège, le manque de cohérence et de régularité entre les formulations citées ici. La succession de propriétés sur les fractions pourrait être l'occasion de travailler sur leur formulation : elles peuvent toutes les trois être formulées sans variables, puis avec des variables et une quantification universelle explicite. Des expressions telles que « quels que soient les réels a , b et c » ou « pour tous réels a , b et c » sont souvent jugées trop formelles en début de collège, et donc incompréhensibles par les élèves. Pourtant, ceux-ci ont bien à comprendre que ces propriétés sont des énoncés universels, sans que rien d'explicite ne l'indique ! Nous suggérons qu'à partir du moment où des variables sont utilisées pour formuler les propriétés, au moins une expression signifiant la quantification soit introduite (qui peut éventuellement faire l'objet d'un travail dédié, par exemple un Vrai/Faux sur certaines propositions formulées avec cette expression). Les tâches de reformulations (avec et sans variables) serviront ensuite à donner du sens à l'utilisation de variables et aux expressions marquant la quantification universelle.

Signalons tout de même une formulation malheureuse rencontrée dans ce manuel page 80 :

Propriété : Si a , b et c désignent des nombres décimaux avec $c \neq 0$, alors

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a - b}{c}$$

L'utilisation de l'expression « si...alors... » n'est pas pertinente du tout ici : il ne s'agit en aucun cas d'une implication, il suffit d'essayer de formuler la contraposée pour s'en convaincre !

De la même façon en géométrie, il est possible, et selon nous souhaitable, de proposer plusieurs formulations, par exemple « quel que soit le segment $[AB]$, tout point équidistant de A et de B appartient à la médiatrice de $[AB]$ », « tout point équidistant des extrémités d'un segment $[AB]$ est sur sa médiatrice », « quel que soit le segment $[AB]$ et quel que soit le point M , si $MA=MB$, alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$ ». Nous ne bannissons pas systématiquement les implicites (la quantification universelle sur le segment $[AB]$ dans la deuxième formulation proposée ici est implicitement portée par le « un »), parce que l'équivalence entre ces différentes formulations permet de les expliciter, et donc d'en expliquer les usages.

7) Les différents types de raisonnement

a) Comment utiliser une propriété : une activité en soi, un exemple autour des théorèmes de la droite des milieux

Nous défendons l'idée qu'il est pertinent de demander parfois seulement « est-ce que, dans telle situation, je peux conclure grâce à tel théorème ? », idée que nous avons retrouvée dans l'exercice ci-après extrait du cahier Sésamath 4^e édition 2015 p 90 [15].

1 À la recherche du bon théorème

a. Sur les figures suivantes, les droites repassées en gras sont parallèles. Indique, si possible, le numéro du théorème que tu peux appliquer parmi les trois théorèmes suivants :

Théorème 1 : « Si dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. »

Théorème 2 : « Si dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté. »

Théorème 3 : « Si dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté. »

b. Colorie en vert le triangle que tu utilises.

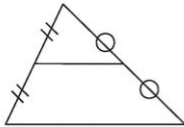


fig 1 : th

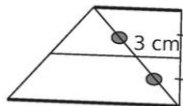


fig 2 : th

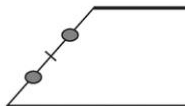


fig 3 : th

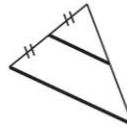


fig 4 : th

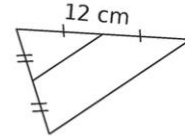


fig 5 : th

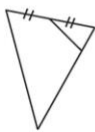


fig 6 : th

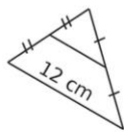


fig 7 : th

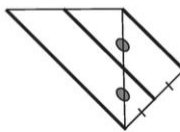


fig 8 : th



fig 9 : th

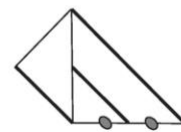


fig 10 : th

Quelques critiques nous ont amenés à modifier cet énoncé :

- Dans la formulation des théorèmes, le « dans un triangle » est placé à l'intérieur de la prémisse de l'implication (après le « si »), or cette partie de la proposition sert à exprimer la quantification universelle, donc doit plutôt être placée au début et plutôt avec une quantification explicite : « dans tout triangle, si... ».
- Par ailleurs, l'expression « théorème que tu peux appliquer » manque de précision. Par exemple pour la figure 1, les théorèmes 1 et 2 peuvent être appliqués puisque leur prémisse est vérifiée (« une droite passe par (ou joint) les milieux de deux côtés »). L'application du théorème 2 ne permettrait pas de calculer une longueur, mais seulement d'établir une relation entre deux longueurs. La question n'est donc pas seulement « quel théorème peux-tu appliquer ? », mais également « que permet-il de déduire ? »¹⁴, questions auxquelles il y a plusieurs réponses. Il sera alors pertinent de discuter de la pertinence d'appliquer tel ou tel théorème : pour la figure 8 par exemple, le théorème 1 peut tout-à-fait être appliqué, puisque sa prémisse est vérifiée, mais ce qu'il permet de déduire, à savoir le parallélisme de deux droites, est déjà connu, donc cette application n'est pas pertinente.

Nous avons donc proposé la version modifiée suivante (trois figures sont données ici à titre d'exemple, l'intégralité de l'activité est donnée en annexe page 88).

¹⁴ Notons que pour répondre à cela, il serait utile d'avoir des noms de points.

À la recherche du bon théorème

a. Sur les figures suivantes, les droites repassées en gras sont parallèles. Indique, si possible dans le tableau, un théorème que tu peux utiliser pour obtenir des informations complémentaires sur la figure parmi les trois théorèmes suivants et indique la conclusion que tu peux en tirer :

Théorème 1 : « Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. »

Théorème 2 : « Dans un triangle, si un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté. »

Théorème 3 : « Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté. »

b. Colorie en vert le triangle que tu utilises pour l'application du théorème.

N°	Figure	Th. 1	Th. 2	Th. 3	Conclusion
1					
2					
3					

Dans cette première version, les élèves sont incités à n'utiliser qu'un seul théorème, c'est la mise en commun de leurs réponses qui viendra leur montrer que dans certaines situations plusieurs théorèmes peuvent être utilisés. Une autre version est possible, dans laquelle il est explicitement demandé de donner la liste exhaustive des théorèmes applicables :

Version modifiée n°2 de l'exercice (avec la même série de figures) :

À la recherche du bon théorème

a. Sur les figures suivantes, les droites repassées en gras sont parallèles. Indique, si possible dans le tableau, les théorèmes que tu peux appliquer parmi les trois théorèmes suivants et indique pour chaque théorème la conclusion que tu peux en tirer.

Il est également possible de demander aux élèves de dire pour chaque théorème et chaque situation s'il est possible de l'appliquer (ce qui est une tâche un peu différente, avec un systématisme qui la simplifie, mais qui enlève aux élèves l'initiative d'élaborer des stratégies pour choisir quel théorème appliquer)

Version modifiée n°3 de l'exercice (avec la même série de figures) :

À la recherche du bon théorème

a. Sur les figures suivantes, les droites repassées en gras sont parallèles. Indique dans le tableau pour chaque théorème :

- la conclusion de son application s'il est possible de l'appliquer.
- qu'il est non - applicable s'il n'est pas possible l'appliquer en justifiant la réponse.

b) Autres exemples à venir...

III. Activités

Plusieurs activités proposées ci-après se présentent sous la forme de Vrai/Faux, mais à la différence des Vrai/faux qui servent surtout à tester si les élèves ont bien compris et retenu le cours, le but ici est plutôt de susciter la discussion.

Vous trouverez à la fin de cette partie un tableau des activités décrivant leur durée, les notions abordées, et les niveaux auxquels elles peuvent être proposées.

1) Sacs de boules et Quadrilatères

Les deux activités décrites dans cette partie ont été proposées en 6^e et en 5^e. Elles peuvent selon nous être également pertinentes au-delà de ces classes. D'autre part, le travail sur différentes formulations dans l'activité « Sacs de boules » peut être envisagé en collaboration avec le professeur de français.

L'idée première de l'activité « Sacs de boules » était d'aborder avec les élèves l'ambiguïté des formulations en « tous ... ne sont pas... » [16]. L'ambiguïté est la suivante :

La proposition « tous les x ne sont pas P » signifie « les x ne sont pas tous P », autrement dit « il existe au moins un x qui n'est pas P »

(« tous les chats ne sont pas noirs » signifie « les chats ne sont pas tous noirs », c'est-à-dire « il existe au moins un chat qui n'est pas noir »)

Mais elle est parfois entendue comme « tous les x sont $\text{NON}(P)$ »

(« tous les chats sont *non noirs* », nous dirions en fait « aucun chat n'est noir »)

Discuter de cette formulation est surtout un prétexte pour montrer que certaines formulations sont ambiguës. Or, pour se comprendre, et notamment pour se mettre d'accord sur le fait qu'une proposition est vraie ou non, il est essentiel d'être d'accord sur la façon de l'interpréter.

La logique mathématique est utilisée pour nous aider à identifier les différentes interprétations, en les ramenant à des interprétations « codifiées » (nous pourrions également dire « formalisées », même si nous restons évidemment au collège dans un formalisme très léger, utilisant plutôt la langue courante que des symboles logiques).

a) Objectifs

Les deux activités permettent d'aborder plusieurs notions de logique : les quantifications (voir page 16), la négation (voir page 10), propositions équivalentes (voir page 15).

L'activité « Quadrilatères » nécessite de connaître la définition minimale d'un rectangle par les angles droits alors que l'activité « Sacs de boules » ne nécessite pas de connaissance mathématique.

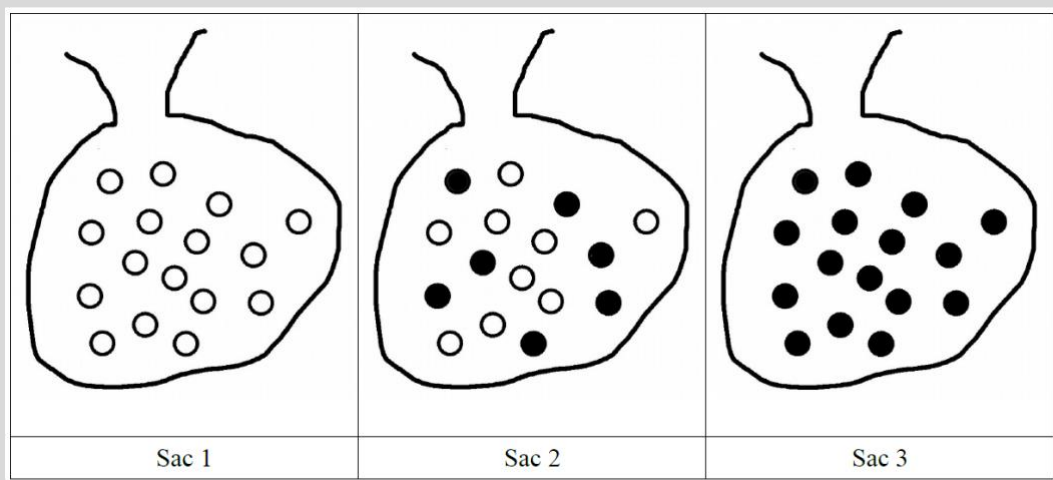
b) Déroulement de l'activité « Sacs de boules »

L'activité « Sacs de boules » a été proposée dans deux classes de 6^e (53 élèves). Les élèves ont d'abord répondu individuellement aux questions, puis l'enseignante a proposé une correction collective à partir des réponses des élèves. L'activité et la discussion lors de la mise en commun ont duré une heure.

c) Fiche élève de l'activité « Sacs de boules »

Vous trouverez ci-après l'activité « Sacs de boules » telle qu'elle a été proposée pour les séances décrites ici. Une version modifiée suite à nos discussions se trouve en annexe (Sacs de boules Version 2 - annexe page 77).

Voici 3 schémas de sacs contenant des boules blanches ou noires :



Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F) pour chaque sac :

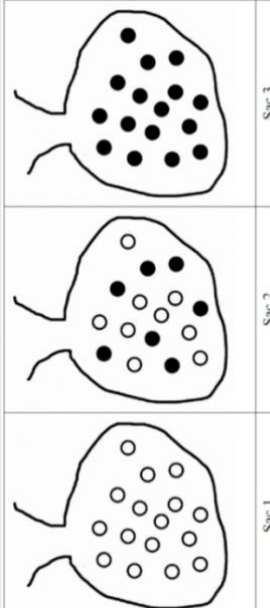
	Dans le sac 1	Dans le sac 2	Dans le sac 3
Toutes les boules sont blanches.			
Il y a au moins une boule non blanche.			
Aucune boule n'est blanche.			
Il existe une boule blanche.			
Toutes les boules ne sont pas blanches.			
Toutes les boules sont non blanches.			

d) Analyse des réponses

Nous présentons des statistiques à partir des réponses de 53 élèves.

	SAC 1			SAC 2			SAC 3			Commentaires
	Bonne réponse	Mauvaise réponse	Pas de réponse	Bonne réponse	Mauvaise réponse	Pas de réponse	Bonne réponse	Mauvaise réponse	Pas de réponse	
Toutes les boules sont blanches	53	0	0	52	1	0	53	0	0	Aucune ambiguïté pour les élèves
Il y a au moins une boule non blanche	46	7	0	45	8	0	35	18	0	Confusion possible : « au moins une » avec « juste une » ou « non blanche » avec « blanche »
Aucune boule n'est blanche	53	0	0	53	0	0	53	0	0	Aucune ambiguïté pour les élèves
Il existe une boule blanche	41	11	1	40	12	1	51	1	1	Confusion possible avec « il n'existe qu'une boule blanche » ou « il n'y a que des boules blanches »
Toutes les boules ne sont pas blanches	49	3	1	30	22	1	40	12	1	Certains pensent que ces deux phrases ont le même sens.
Toutes les boules sont non blanches	51	1	1	43	9	1	48	4	1	
REPONSES POUR :	FW	FFV	VVF	VVF	VFV	FFF	VFF	FVF	Pas de rép.	TOTAL
Il y a au moins une boule non blanche	31	3	5	1	1	3	1	9		53
REPONSES POUR :	VVF	VFF	FFF	VFV	VFF	FVF				
Il existe une boule blanche	37	3	8	1	1	3			1	53
REPONSES POUR :	FW / FFV	FFV / FFV	FW / FW	FWV / FFV	FWV / FFV	Autres				
Toutes les boules ne sont pas blanches	13	18	4	7	10				1	53
Toutes les boules sont non blanches										

Les deux classes



Nous pouvons d'abord constater qu'il n'y a pratiquement aucune absence de réponse. Cela signifie que les réponses sont à la portée des élèves de 6^e et qu'ils se sont impliqués dans l'activité.

La première proposition « toutes les boules sont blanches » et **la troisième proposition** « Aucune boule n'est blanche » ne posent pas de problème. Par contre, l'enseignant peut souligner lors de la correction qu'elles ne sont pas la négation l'une de l'autre, contrairement à ce que peuvent penser certains élèves, puisque pour la première la réponse est Vraie/Fausse/Fausse et pour la troisième la réponse est Fausse/Fausse/Vraie.

Pour la deuxième proposition, « Il y a au moins une boule non blanche », les élèves ont donné majoritairement la bonne réponse (FVV). Essayons de comprendre les réponses incorrectes :

- FVF : certains élèves ont pu penser que « il y a au moins » n'est pas vraie quand on sait que « tous » (erreur liée au principe du maximum d'information : je dois toujours donner toutes les informations qui sont en ma possession, ainsi, si je sais que « toutes les boules sont rouges », j'ai tort en disant seulement « il y a une boule rouge » qui apporte moins d'information que ce que je sais), ils ont donc répondu Faux pour le dernier sac. Lors de la correction, il est important de signaler que ce principe du maximum d'information n'est pas un critère pour évaluer la vérité d'une proposition en mathématiques (page 24).

- VVF : On se demande si l'élève n'a pas compris la proposition comme « il y a au moins une boule blanche » pour laquelle sa réponse aurait été correcte. L'expression « non blanche » peut poser problème, car elle n'est pas souvent utilisée dans le langage courant. Certains élèves ont pu ne pas lire le « non », ou ne pas le comprendre. Lors de la correction, l'enseignant peut demander de reformuler cette phrase sans utiliser cette expression : « il y a au moins une boule qui n'est pas blanche », « une boule au moins n'est pas blanche ». Dans cette version, puisqu'il n'y a que deux couleurs, « être non blanche » est synonyme de « être noire », et on peut donc aussi proposer « il y a au moins une boule noire ».

- FFV : L'élève peut avoir interprété la proposition comme « toutes les boules sont non blanches » pour laquelle sa réponse aurait été correcte. Certains élèves ont pu ne retenir de la lecture de la phrase que le nom « boule » et l'adjectif « non blanche », sans prendre en compte, ou sans comprendre, la quantification, et répondre par défaut comme si la quantification était universelle.

- FFF : Ce serait une bonne réponse pour la proposition « il y a exactement une boule blanche », nous avons choisi pour cette deuxième phrase d'utiliser l'expression « au moins une » qui n'est pas ambiguë, justement pour ne pas rajouter à l'éventuelle difficulté déjà présente à cause de l'expression « non blanche », mais certains élèves ont pu ne pas y prêter attention.

- VFV, VFF : pas d'interprétation privilégiée de ces réponses.

Pour la quatrième proposition, « il existe une boule blanche », là aussi la majorité des réponses sont correctes. Certains élèves ont pu entendre « il existe une » comme « il existe exactement une » et répondre F/F/F. C'est l'occasion de souligner l'interprétation de cette expression en mathématiques, qui peut différer de celle du langage courant. Les réponses montrent qu'il n'est pas superflu, quand nous voulons être sûr qu'il n'y a pas d'ambiguïté, de dire « il existe au moins un... ».

La cinquième proposition « toutes les boules ne sont pas blanches » et la **sixième proposition** « les boules sont toutes non blanches » sont mises l'une après l'autre pour pouvoir justement les comparer l'une à l'autre, que ce soit lors de la correction, ou pour les élèves, lorsqu'ils répondent individuellement. Une interprétation spontanée de la cinquième phrase pourra être remise en cause, ou au contraire renforcée, par la lecture de la sixième phrase. Nous constatons qu'un tiers des élèves lisent ces deux propositions comme équivalentes (en interprétant correctement la sixième proposition, réponses FFV/FFV), alors que seulement un quart d'entre eux les interprètent correctement, et font la distinction (réponses FVV/FFV). Nous avons également relevé les réponses suivantes :

- FVF/FFV : la proposition 5 est bien interprétée comme « il existe au moins une boule non blanche », mais considérée comme fausse pour le dernier sac à cause du principe du maximum d'information (comme pour la deuxième proposition).

- FVV/FVV : pas d'interprétation privilégiée pour ces réponses, mais en tout cas, les deux propositions sont considérées comme synonymes.

Dans cette première version, nous avons mis à la suite les deux propositions « toutes les boules ne sont pas blanches » et « les boules sont toutes non blanches ». Lors de la correction, l'enseignante avait demandé aux élèves ce qu'ils pensaient de la proposition « les boules ne sont pas toutes blanches », qui ressemble encore plus à la proposition « toutes les boules ne sont pas blanches », au déplacement du mot « toutes » près. Cette nouvelle proposition semble plus facilement entendue comme « il existe au moins une boule non blanche », même s'il y a une ambiguïté sur l'interprétation de « toutes blanches » qui peut être entendue comme « entièrement blanches », mais la confusion n'est pas gênante ici puisque de toute façon les boules sont soit toutes blanches soit toutes noires. Nous avons alors fait une deuxième version de l'activité, incluant cette nouvelle proposition, pour laquelle nous n'avons malheureusement pas de statistiques.

Nous avons également rajouté un sac comportant des boules grises, c'est-à-dire ni noires, ni blanches. Cette dernière modification n'a pas pour but d'avoir un effet sur les réponses des élèves, puisque les réponses devraient être identiques pour le sac avec des boules noires et blanches, et pour le sac avec des boules noires, des boules blanches, et des boules grises, quelles que soient les interprétations des propositions que font les élèves. Par contre, lors de la correction, la négation de « être blanche » ne sera plus simplement équivalente à « être noire » mais à « être noire ou être grise ».

Ce dernier énoncé est donné en annexe page 77.

e) Déroulement de l'activité « Quadrilatères »

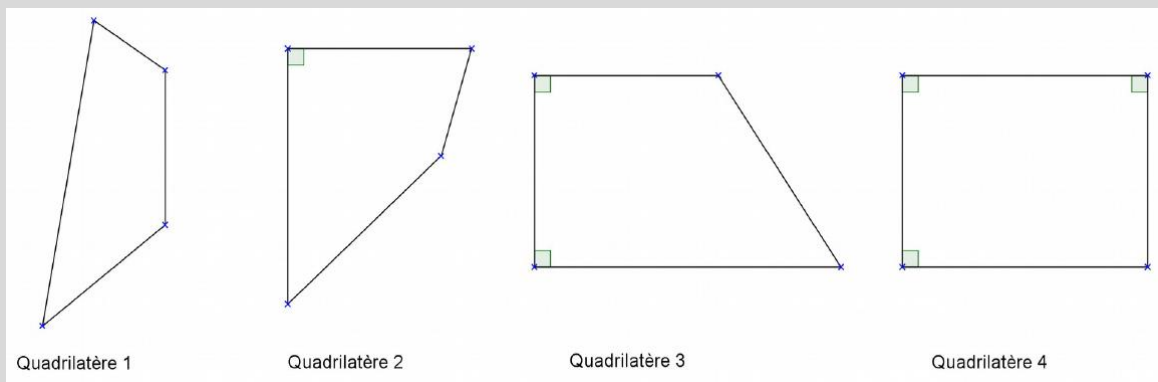
L'activité « Quadrilatères » a été proposée dans une classe de 5^e. Les élèves ont également d'abord complété le premier tableau (V/F) individuellement. La correction de cette première partie a ensuite été menée collectivement : des élèves ont proposé leur réponse, et il y a eu discussion des désaccords. La première partie et sa correction ont duré une heure. Une fois la première partie corrigée, les six situations de la deuxième partie ont été distribuées aux élèves, qui y ont réfléchi individuellement pendant une trentaine de minutes. L'enseignante a ensuite préparé un diaporama de correction à partir des réponses des élèves, qui a été commenté avec la classe lors d'une séance ultérieure d'une heure.

f) Fiche élève de l'activité « Quadrilatères »

Vous trouverez dans les pages suivantes l'activité « Quadrilatères » telles qu'elle a été proposée pour la séance décrite ici. Une version modifiée suite à nos discussions se trouve en annexe (Quadrilatères V2 - annexe page 78).

Première partie :

A) Voici 4 schémas de quadrilatères :



Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F) pour chaque quadrilatère :

	Quadrilatère 1	Quadrilatère 2	Quadrilatère 3	Quadrilatère 4
Tous les angles du quadrilatère sont droits.				
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.				
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.				
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.				
Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.				
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.				
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.				

Extraits de la deuxième partie :

B) Possible ou impossible ?

1) Est-il possible de construire un quadrilatère tel que le tableau suivant est vérifié. Si oui dessiner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible :

Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F	
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	
Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.	F	
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	F	
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F	

2) Est-il possible de construire un quadrilatère tel que le tableau suivant est vérifié. Si oui dessiner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible :

Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F	
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	
Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.	F	
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F	

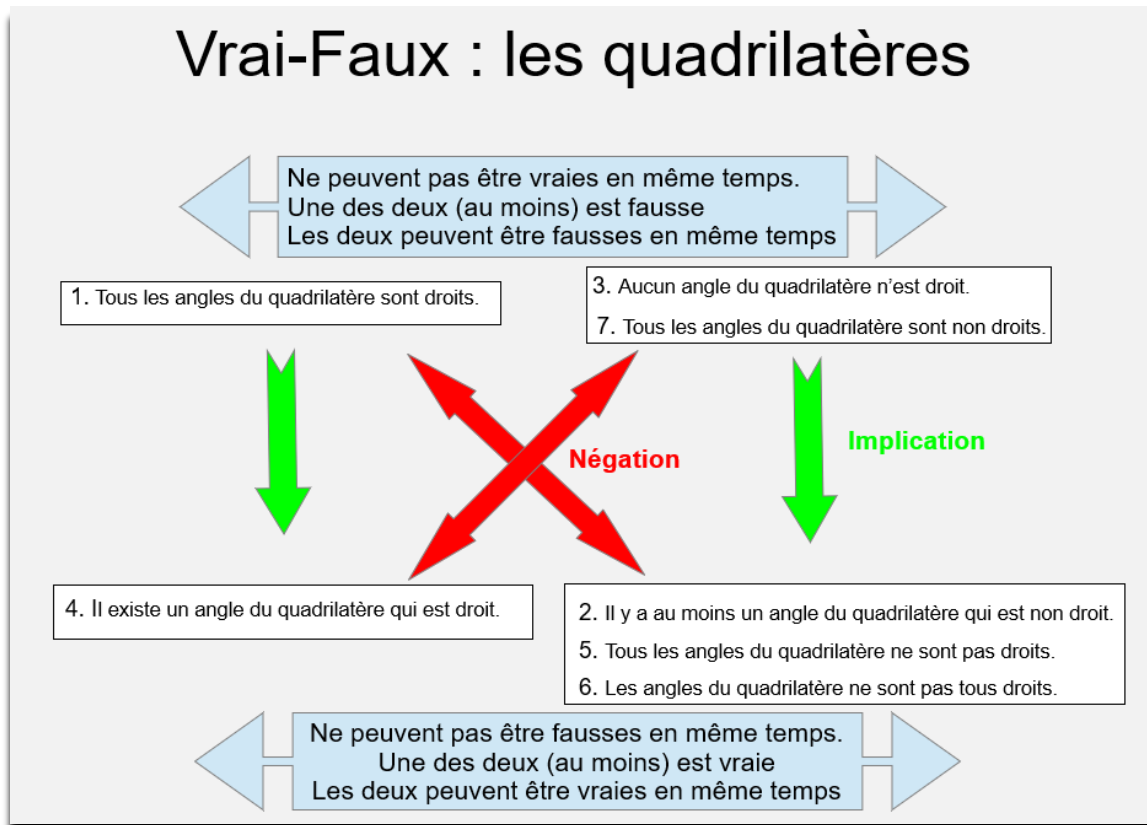
g) Analyse de copies et éléments de correction

Dans cette version géométrique de l'activité, avec cette fois-ci des quadrilatères ayant ou non des angles droits, l'accent a été mis lors de la correction de la première partie sur les relations entre les propositions : équivalentes, négation l'une de l'autre, contradictoires. À l'issue de cette correction, l'enseignante a présenté une synthèse sous deux formes :

- Le tableau à remplir dans lequel les lignes une fois complétées sont colorées pour faire ressortir les propositions équivalentes :

		Q1	Q2	Q3	Q4
1	Tous les angles du quadrilatère sont droits.	F	F	F	V
2	Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	V	V	V	F
3	Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	V	F	F	F
4	Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	F	V	V	V
5	Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.	V	V	V	F
6	Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	V	V	F
7	Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	V	F	F	F

- Un « carré des oppositions » (voir page 17) marquant les relations entre les différentes propositions :



Cette première partie, identique à celle de l'activité « Sacs de boules » a été complétée en demandant ensuite aux élèves de construire des quadrilatères pour des valeurs de vérité données de ces propositions. Cette deuxième partie leur permettait de réinvestir ce qui avait été vu sur les relations entre propositions dans la première partie, et leur demandait de mobiliser des connaissances sur les rectangles. Nous avons ensuite préparé un [diaporama de correction](#) à partir des productions des élèves disponible sur le site du groupe ¹⁵. Nous proposons et commentons ci-après les diapositives associées aux deux premières situations (le premier quadrilatère peut être construit mais pas le deuxième).

- **Première situation** (voir énoncé page 52).

Solution :

La première proposition, « Tous les angles du quadrilatère sont droits » est vraie ce qui permet de dire que s'il est possible de construire un quadrilatère pour la situation 1,

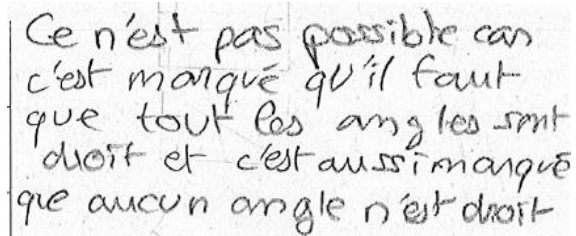
15

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/quadrilateres_correction_animee_2016/

c'est nécessairement un rectangle. Nous constatons que les valeurs de vérité des autres propositions sont compatibles avec cette hypothèse.

Bilan des copies d'élèves :

Pour cette première situation, nous avons d'abord choisi de commenter la réponse suivante :



Ce n'est pas possible car c'est marqué qu'il faut que tout les angles sont droit et c'est aussi marqué que aucun angle n'est droit

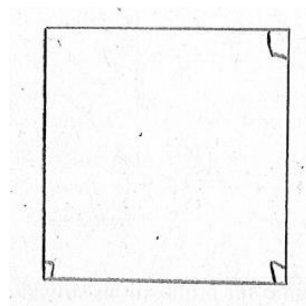
En effet, nous faisons l'hypothèse que cet élève n'a pas compris que certaines propositions étaient données comme fausses, il a donc lu toutes les propositions comme des affirmations, attitude sans doute renforcée par le fait que c'est la pratique habituelle. 4 élèves sur 21 ont fait au moins une fois cette erreur.

Pour cette première situation, 10 élèves ont clairement proposé un rectangle, 5 en codant 3 angles droits, 5 en codant 4 angles droits. Une autre élève a proposé un carré, qui est effectivement un exemple de quadrilatère pour lequel les propositions ont ces valeurs de vérité. Un élève a proposé un rectangle en codant seulement 2 angles droits, 2 élèves ont dessiné des figures ressemblant vraiment à des rectangles, mais sans codage des angles droits, avec par contre codage des longueurs, 1 élève a proposé une figure qui est moins clairement un rectangle, sans aucun codage. Finalement, 15 élèves sur 21 ont ainsi repéré qu'un rectangle vérifiait ces valeurs de vérité.

Correction en classe :

L'enseignante commence par discuter avec les élèves l'extrait de copie précédent pour réinstaller la notion de valeur de vérité d'une proposition.

Puis, elle propose un exemple de réponse correcte basée sur le fait que la première proposition est vraie (Hypothèse). Parmi toutes les solutions proposées par les élèves, elle choisit un codage avec 3 angles droits pour pouvoir au passage rappeler la propriété permettant d'en déduire qu'il y a 4 angles droits.



L'enseignante propose ensuite aux élèves de vérifier collectivement que cette figure vérifie bien chaque valeur de vérité de chaque proposition :

1	Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	H
2	Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	✓
3	Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F	✓
4	Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	✓
5	Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.	F	✓
6	Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	F	✓
7	Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F	✓

Loïc

~~Ce n'est pas possible car c'est marqué qu'il faut que tout les angles sont droit et c'est aussi marqué que aucun angle n'est droit~~

Nathan



Elle conclut finalement que n'importe quel rectangle convient :

1	Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	Donc si on peut construire la figure c'est nécessairement un rectangle.
2	Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	Compatible avec le rectangle.
3	Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F	Compatible avec le rectangle.
4	Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	Compatible avec le rectangle.
5	Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.	F	Compatible avec le rectangle.
6	Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	F	Compatible avec le rectangle.
7	Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F	Compatible avec le rectangle.

Conclusion : n'importe quel rectangle convient !

- **Deuxième situation** (voir énoncé page 53).

Solution :

Dans cette situation il est impossible de construire un tel quadrilatère, les valeurs de vérité des propositions 1 et 6 étant incompatibles.

Bilan des copies d'élèves :

Nous trouvons de nouveau deux exemples de productions d'élèves qui lisent toutes les propositions comme vraies (remarquons que ces élèves relèvent tout de même de façon correcte les contradictions entre ces propositions) :

Ce n'est pas possible car il faut que tous les angles soient droit mais il faut aussi un angle pas droit.

C'est impossible car on nous dit que tous les angles sont droit et que aucun angle est droit.

9 élèves sur 21 ont conclu à l'impossibilité en justifiant par le fait que les propositions 1 et 6 doivent être vraies, alors qu'elles sont contradictoires. L'enseignante montre deux exemples de formulation de la justification, ainsi qu'une copie d'un élève pour lequel il y a une ambiguïté sur ce qui lui a permis de conclure (a-t-il pensé que la proposition 2 était vraie ou bien a-t-il reformulé la proposition 6 en « il y a un angle non droit » ? Le fait qu'il ait correctement répondu pour la première situation laisse plutôt penser que la deuxième hypothèse est la bonne).

Correction en classe :

Comme pour la première situation, l'enseignante commence par discuter avec les élèves des extraits de copie précédents où les élèves n'ont visiblement pas tenu compte des valeurs de vérité.

Elle échange ensuite avec eux à propos de trois des bonnes réponses proposées.

1	Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	X	<p>Loïc (1 et 2) Ce n'est pas possible car il faut que tous les angles soient droit mais il faut aussi un angle pas droit.</p> <p>Maximilien (1 et 3) C'est impossible car on nous dit que tous les angles sont droit et que aucun angle est droit.</p> <p>Bonne réponse en question 1 donc c'est une interprétation du 6</p>
2	Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F		
3	Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F		
4	Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V		
5	Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.	F		
6	Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	X	
7	Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F		

<p>Koumba (1 et 6) ✓ Impossible : car une fois il disent que tous les angles sont droit une fois il disent il ne sont pas tous droit.</p>	<p>Cléopée (1 et 6) ✓ Non, ce n'est pas possible car les angles du quadrilatère ne peuvent pas être en même temps tous droits et en même temps pas tous droits.</p>	<p>Léo (1 et 2 ? ou 6 ?) ✓ C'est impossible car il ne peut pas y avoir tous les angles droits et un angle pas droit.</p>
--	--	---

L'enseignante conclut donc à l'impossibilité de construire un tel quadrilatère :

1	Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	Donc si on peut construire la figure c'est nécessairement un rectangle.
2	Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	Compatible avec le rectangle.
3	Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F	Compatible avec le rectangle.
4	Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	Compatible avec le rectangle.
5	Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.	F	Compatible avec le rectangle.
6	Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	Pas compatible avec le rectangle.
7	Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F	Compatible avec le rectangle.

Conclusion : impossible de construire un tel quadrilatère !

Finalement, lors de l'analyse des copies d'élèves, nous avons été gênés car l'interprétation de la proposition « tous les angles ne sont pas droits » venait éventuellement compromettre les réponses à la deuxième partie de l'activité. Nous avons donc refait une version ne comportant pas cette proposition dans la deuxième partie, qui est celle proposée en annexe page 78.

2) Divisibilité

Les critères de divisibilité étant formulés avec des ET, nous y avons vu l'occasion de travailler sur ce connecteur. Et bien sûr, le connecteur OU apparaît dès que l'on s'intéresse à la propriété de « ne pas être divisible par... ».

a) Objectifs

Une première version de cette activité (qui correspond à la partie A de l'activité présentée ici) avait été proposée en 6^e. Elle permettait de travailler les connecteurs logiques ET, OU et NON dans un contexte d'activités sur la divisibilité. Elle a été enrichie pour travailler également des connaissances en arithmétique.

La deuxième partie de l'activité a pour objectif d'établir de nouvelles propriétés caractéristiques de divisibilité, par exemple : « Les nombres divisibles par 12 sont les nombres qui sont à la fois divisibles par 3 et par 4 ».

Selon le temps consacré à l'activité et à sa correction, cette deuxième partie permet aussi d'aborder la notion de condition nécessaire et de condition suffisante ainsi que la distinction entre les propriétés caractéristiques et celles qui ne le sont pas, puisqu'elle amène par exemple à s'interroger sur la relation entre « être divisible par 12 » et « être divisible par 2 et par 6 ». Elle permet de travailler la différence entre les notions de nombre premier et de nombres premiers entre eux. Enfin, elle permet de rencontrer des conjectures qui ne sont en fait pas vraies, et de mettre ainsi en défaut un « théorème élève » obtenu par simple extrapolation. Par exemple, ce n'est pas parce qu'on a constaté que « Les nombres divisibles par 10 sont les nombres qui sont à la fois divisibles par 2 et par 5 » que la proposition « Les nombres divisibles par n sont les nombres qui sont à la fois divisibles par a et par b » est vraie pour tout nombre n , produit de deux nombres entiers a et b . Il est également intéressant de faire comprendre aux élèves que si une conjecture ne conduit pas à une propriété vraie, il peut être utile d'y ajouter des conditions pour en faire une propriété vraie. Par exemple ici, l'activité permet d'aboutir au fait que la propriété « Les nombres divisibles par n sont les nombres qui sont à la fois divisibles par a et par b » est vraie pour tout nombre n , produit de deux nombres entiers a et b premiers entre eux.

b) Déroulement

L'activité a été proposée en classe de 3^e, en début d'année scolaire, avant le cours sur les critères de divisibilité. La première partie (exercices A1 et A2 ci-dessous) a été commencée individuellement en classe (1h) et terminée à la maison. Après correction des tableaux et vérification des critères établis en classe (1h), la deuxième partie a été faite à la maison. Le tout a été ramassé afin de pouvoir utiliser des extraits de copies lors de la mise en commun (1h).

Comme les cours sur le PGCD et les nombres premiers entre eux n'avaient pas encore été abordés, pendant l'activité nous avons parlé de nombres qui ont 1 pour seul diviseur commun et précisé qu'on appelait cela des nombres premiers entre eux.

c) Fiche élève de l'activité « Divisibilité »

Nous vous présentons ici des extraits de la fiche d'activité élèves sur la divisibilité. L'énoncé complet est proposé en annexe page 84.

Les nombres pour lesquels les élèves doivent réfléchir à des critères de divisibilité sont :

- 10 parce que le critère est déjà connu depuis l'école primaire.
- 6 parce qu'ils en connaissent la table et que les élèves sont familiers avec sa décomposition en 2×3 .
- 15 parce que sa seule décomposition en produit non triviale est un produit de deux nombres premiers dont les critères de divisibilité sont connus alors que la table de 15 n'est pas nécessairement connue.
- 12 parce qu'il a plusieurs décompositions en produit de nombres entiers dont une met en défaut la conjecture établie.

Extraits de la première partie (A, B et C) :

A. Divisibilité par 2, 5, et 10

Exercice A1

1°) Rappeler le critère de divisibilité par 5.

2°) Comment caractériser les nombres entiers non divisibles par 5 ?

Exercice A2 (calculatrice interdite)

1°) Pour chacun des nombres suivants : 315; 4864; 730 ; 5610; 955 ; 561 et 30,

- le ranger dans le tableau de gauche s'il est divisible par 10 et dans le tableau de droite sinon,

- répondre par « oui » ou par « non » aux questions « Ce nombre est-il divisible par 2 ? » et « Ce nombre est-il divisible par 5 ? ».

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?

2°) Compléter les tableaux suivants en proposant quand cela est possible un nombre qui convienne :

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
	Oui	Oui
	Oui	Non
	Non	Oui
	Non	Non

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
	Oui	Oui
	Oui	Non
	Non	Oui
	Non	Non

3°) Recopier et compléter les propriétés suivantes pour qu'elles soient vraies :

- Les nombres entiers qui sont divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 par 5.
- Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui par 2..... par 5.

Nous proposons ensuite de traiter de façon analogue :

- B. La divisibilité par 2, 3, et 6 (calculatrice autorisée)
- C. La divisibilité par 3, 5, et 15 (calculatrice autorisée)

Deuxième partie :

D. Conjecture et discussion

Nous avons vu que :

A) Les nombres entiers qui sont divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 5.

B) Les nombres entiers qui sont divisibles par 6 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 3.

C) Les nombres entiers qui sont divisibles par 15 sont ceux qui sont divisibles par 3 et par 5.

À la suite de ces résultats, on écrit la propriété suivante¹⁶.

« Les nombres entiers qui sont divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par S et par T. »

Quelles valeurs proposes-tu pour S et T :

S =

T =

Reproduis le test des exercices A, B, C pour tester cette propriété :

Pour chacun des nombres suivants : 312 ; 5610 ; 732 ; 952 ; 1244 ; 36 ; 102 et 975

- le ranger dans le tableau de gauche s'il est divisible par 12 et dans le tableau de droite sinon,

- répondre par « oui » ou par « non » aux questions « Ce nombre est-il divisible par S ? » et « Ce nombre est-il divisible par T ? », S et T étant les nombres proposés précédemment.

Nombres divisibles par 12			Nombres non divisibles par 12		
Nombre	Est-il divisible par ?	Est-il divisible par ?	Nombre	Est-il divisible par ?	Est-il divisible par ?

Que penses-tu finalement de la propriété que tu as complétée pour 12 ?

¹⁶ L'énoncé original a été légèrement modifié suite à l'analyse des copies.

d) Analyse des réponses et éléments de correction

- **Mise en commun de la première partie de l'exercice A2**

En vidéo-projection, nous complétons les tableaux proposés pour le critère de divisibilité par 10 et établissons une conjecture.

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
730	OUI	OUI
5610	OUI	OUI
30	OUI	OUI

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
315	NON	OUI
4864	OUI	NON
955	NON	OUI
561	NON	NON

Il semble que :

- tous les nombres divisibles par 10 sont divisibles par 2 et par 5.
- tous les nombres divisibles par 2 et par 5 sont divisibles par 10.

Se pose alors la question de la preuve des deux implications :

- « tous les nombres divisibles par 10 sont divisibles par 2 et par 5 » qui se démontre à l'aide des critères de divisibilité ou du calcul littéral.
- « tous les nombres divisibles par 2 et par 5 sont divisibles par 10 » qui se démontre à l'aide des critères de divisibilité.

On en conclut alors que :

« Les nombres divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 5. »

En regardant le deuxième tableau, il semble que les nombres non divisibles par 10 sont les nombres non divisibles par 2 ou non divisibles par 5. Ici, il ne s'agit pas de faire une démonstration avec les élèves, mais juste de leur faire sentir ce passage de $\text{NON}(A \text{ ET } B)$ à $(\text{NON } A \text{ OU } \text{NON } B)$.

Ainsi, pour la question 3°) de l'exercice A2, deux réponses sont possibles et correctes :

- une première qui fait apparaître le OU : « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 ou (qui ne sont) pas (divisibles) par 5 ». La répétition au minimum du « pas » de part et d'autre du OU signifie qu'il faut bien comprendre ici $(\text{NON } A \text{ OU } \text{NON } B)$, ce qui est encore plus explicite quand il y a répétition de toute l'expression « ne sont pas divisibles ».
- Une autre où il n'apparaît pas « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 et par 5 », qui correspond à la forme $\text{NON}(A \text{ ET } B)$.

Nous corrigeons ensuite la question des multiples de 6 et la question des multiples de 15, et établissons les propriétés suivantes :

« Les nombres divisibles par 6 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 3 ».

« Les nombres divisibles par 15 sont ceux qui sont divisibles par 3 et par 5 ».

Notons que pour ces deux propriétés seule une des deux implications est démontrable au collège.

Il est intéressant de faire un temps de synthèse à la fin de la correction des trois premiers cas en soulignant dans chacun des cas étudiés le lien entre la divisibilité par un entier n et la divisibilité par deux entiers a et b tels que $n=axb$.

- **Peut-on généraliser cette méthode pour déterminer un critère de divisibilité par 12 ? Deuxième partie de l'activité**

Nous corrigeons alors la question sur la divisibilité par 12 : quels nombres choisir et pourquoi ?

Nous établissons la liste des diviseurs de 12 : 1, 2, 3, 4, 6, 12 et notons les produits possibles : $12 = 1 \times 12$, $12 = 2 \times 6$, $12 = 3 \times 4$. Notons que la première décomposition ne nous servira pas pour vérifier la divisibilité par 12 à partir des critères connus.

Nous repartons alors des copies des élèves scannées.

Divisibilité par 12 : copies sur les facteurs 2 et 6

Nombres divisibles par 12		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 6 ?
312	OUI	OUI
732	OUI	OUI
36	OUI	OUI

Nombres non divisibles par 12		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 6 ?
5610	OUI	OUI
852	OUI	NON
1244	OUI	NON
102	OUI	OUI
875	NON	NON

Que penses-tu finalement de la propriété que tu as complété pour 12 ?

La propriété complétée pour 12 n'est pas la même que pour les autres car, dans le tableau des non divisibles par 12, certains nombres sont divisibles par 2 et 6 alors que dans les autres il sont soit divisibles par l'un soit divisibles par l'autre. Sinon:
Les nombres entiers qui sont divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par 2 et 6.

Dans cette réponse, l'élève pointe bien qu'une des deux implications est fausse, mais il affirme ensuite quand même la propriété caractéristique. Nous reprenons alors pour arriver aux réponses correctes :

- La proposition « Tous les nombres divisibles par 12 sont divisibles par 2 et par 6 » semble vraie d'après le premier tableau.
- La proposition « Tous les nombres divisibles par 2 et par 6 sont divisibles par 12 » est fausse d'après le deuxième tableau qui fournit 2 contre-exemples.

Finalement, la propriété « les nombres divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 6 » est fausse.

Cette réponse correcte a été trouvée par certains élèves, comme en témoigne la réponse ci-dessous :

Divisibilité par 12 : copies sur les facteurs 3 et 4

Nombres divisibles par 12			Nombres non divisibles par 12		
Nombre	Est-il divisible par ...4. ?	Est-il divisible par ...3. ?	Nombre	Est-il divisible par ...4. ?	Est-il divisible par ...3. ?
362	oui	oui	560	non	oui
732	oui	oui	982	oui	non
36	oui	oui	1244	oui	non
			102	oui	non
			975	non	oui

- La proposition « Tous les nombres divisibles par 12 sont divisibles par 3 et par 4 » semble vraie d'après le premier tableau
- La proposition « Tous les nombres divisibles par 3 et par 4 sont divisibles par 12 » semble vraie également d'après le premier tableau et l'absence de contre-exemple dans le deuxième tableau. La question de pose de savoir s'il est possible d'en trouver un.

On en déduit que « les nombres divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par 3 et par 4 » est une propriété vraie.

- **Pour aller plus loin : quand peut-on établir une propriété du type « les nombres divisibles par n sont les nombres qui sont divisibles par a et par b », avec $n=axb$?**

L'enseignante a choisi de prolonger le travail arithmétique, en cherchant à ce que les élèves comprennent pourquoi la propriété « les nombres divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 6 » est fausse alors que la propriété « les nombres divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par 3 et par 4 » est vraie.

Elle souligne alors ce qu'on peut dire des facteurs 3 et 4 d'une part et 2 et 6 d'autre part :

- Leur produit vaut 12 !
- 3 et 4 sont premiers entre eux,
- 2 et 6 ne sont pas premiers entre eux

En s'appuyant sur des copies d'élèves, elle propose alors d'étudier d'autres valeurs proposées, dont le produit n'est pas 12. Les résultats suivants sont alors établis :

- « les nombres divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 3 » est fausse
- « les nombres divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par 4 et par 6 » est fausse
- « les nombres divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles par 4 et par 6 » est vraie

Ceci s'explique par le fait qu'on retrouve tous les facteurs premiers de 12 avec le bon ordre de multiplicité dans le produit 4×6 ce qui n'est pas le cas avec les deux autres produits. Autrement dit 12 est un diviseur de 4×6 mais ce n'est ni un diviseur de 2×3 ni un diviseur de 3×6 .

En guise de bilan, l'enseignante est revenue sur une conjecture initiale :

« Si un nombre est divisible par deux autres, alors il est divisible par leur produit » ou encore « Si un nombre est divisible par a et par b , alors il est divisible par $a \times b$ »

Effectivement, la proposition « Tous les nombres divisibles par 3 et par 4 sont divisibles par 12 » est vraie...

Mais les élèves peuvent maintenant montrer que cette conjecture est en fait fausse :

La proposition « Tous les nombres divisibles par 2 et par 6 sont divisibles par 12 » est fausse

Que peut-on alors ajouter comme hypothèse(s) pour obtenir une règle qui fonctionne ?

Si on ajoute que « les nombres a et b sont premiers entre eux », la propriété devient vraie.

« Si un nombre est divisible par a et par b et que a et b sont premiers entre eux, alors il est divisible par $a \times b$ »

Cette propriété permet de faire le raisonnement suivant : « 144 est divisible par 3 et par 4, par ailleurs 3 et 4 sont premiers entre eux donc 144 est divisible par 12 ».

Nous avons formulé la propriété sous forme d'une implication, mais il est bien sûr possible de la formuler dans les termes utilisés dans l'activité :

« Tous les nombres divisibles par a et par b tels que a et b sont premiers entre eux sont divisibles par $a \times b$ »

Attention nous avons vu qu'avoir a et b premiers entre eux est une condition suffisante pour que cela fonctionne mais qu'elle n'est pas nécessaire. En effet, les nombres divisibles par 4 et par 6 sont divisibles par 12 et pourtant 4 et 6 ne sont pas premiers entre eux puisque 2 en est un diviseur commun !

e) Retour sur certaines formulations : « et », « ou », « ni ... ni », « soit »...

De nombreuses formulations employées dans les copies soulèvent des questions. Il est intéressant d'en discuter avec les élèves.

- **Formulation utilisant « ... ou ... » à la place de « ... et ... »**

On trouve assez souvent le « ou » employé à la place de « et », par exemple « les nombres entiers qui sont divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 ou par 5 ». En séparant encore une fois la propriété caractéristique en deux propriétés, nous pouvons insister sur la différence entre ET et OU : la proposition « Les nombres divisibles par 10 sont divisibles par 2 ou par 5 » est vraie puisqu'ils sont divisibles par 2 et par 5, mais la proposition « Les nombres divisibles par 2 ou par 5 sont divisibles par 10 » est fautive, un contre-exemple le prouve.

- **Formulations pour la négation de (A ET B)**

Caractériser les entiers non divisibles par 10 revient à écrire la négation d'une proposition de la forme (A ET B). Nous avons vu page 63 deux formulations possibles :

« Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 et par 5 » (qui correspond à $\text{NON}(A \text{ ET } B)$), « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 ou (qui ne sont) pas (divisibles) par 5 » (qui correspond à $(\text{NON } A \text{ OU } \text{NON } B)$).

Peu d'élèves proposent exactement l'une de ces formulations, et nous sommes alors confrontés à des formulations dont l'ambiguïté, importante à souligner, n'est pas toujours simple à faire sentir. Par exemple, un élève écrit « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 ou par 5 ». Le fait de ne pas répéter « pas » avant « par 5 » fait que la fin de cette proposition est de la forme $\text{NON}(A \text{ OU } B)$, et non $(\text{NON } A \text{ OU } \text{NON } B)$.

Certains élèves semblent conscients de ces subtilités d'interprétation, et précisent leur pensée, comme dans cette réponse : « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui ne sont pas divisibles par 2 et par 5 en même temps », où le « en même temps » précise que l'on est bien avec une forme $\text{NON}(A \text{ ET } B)$.

Certains élèves ont plutôt recours au OU exclusif, de façon correcte comme dans cette réponse : « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui peuvent soit être divisibles par 2 soit par 5 soit par aucun des deux. », ou de façon incorrecte comme dans telle autre : « Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui sont ou divisibles par 2 ou divisibles par 5 »

- **Formulations pour la négation de (A OU B)**

Remarquons que dans la question 2° de l'exercice A1, il s'agissait d'une proposition de la forme A OU B (les nombres divisibles par 5 sont ceux qui se terminent par 0 ou par 5), dont la négation $\text{NON}(A \text{ OU } B)$ est équivalente à $\text{NON}(A) \text{ ET } \text{NON}(B)$. Là aussi nous avons alors plusieurs formulations possibles : « les nombres non divisibles par 5 sont ceux qui ne se terminent pas par 0 ou par 5 », ou bien « les nombres non divisibles par 5 sont ceux qui ne se terminent par 0 et pas par 5 », ou encore « les

nombres non divisibles par 5 sont ceux qui ne se terminent ni par 0 ni par 5 ». Nous avons remarqué que cette dernière formulation, en « ni... ni... » est rarement correctement utilisée par les élèves, par exemple nous avons pu lire : « les nombres entiers non divisibles par 5 c'est ce qui ne se termine ni par 5 ou 0 », ou encore « les nombres non divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles ni par 2 ou ni par 5 ». Le travail ici mêle français et mathématiques...

3) Calcul littéral et quantifications

À l'occasion d'activités algébriques, les élèves rencontrent des propositions quantifiées universellement ou existentiellement de façon cachée ou explicite. Ils doivent savoir les interpréter pour pouvoir se prononcer sur la vérité de telles propositions.

a) Objectifs

Un des objectifs de cette activité est d'explicitier les notions de proposition existentielle et universelle pour aider les élèves à choisir le type de preuve adapté dans les exercices où ces informations sont souvent implicites :

Les notions introduites permettent de distinguer quatre objectifs de preuve :

- Prouver qu'une proposition universelle est Vraie.
- Prouver qu'une proposition universelle est Fausse.
- Prouver qu'une proposition existentielle est Vraie.
- Prouver qu'une proposition existentielle est Fausse.

Un deuxième objectif est de travailler différents types de preuve : quand produire un exemple est-il suffisant ou quand doit-on utiliser une autre méthode ?

Dans le cadre de cette activité, « l'autre méthode » utilisée est le calcul littéral qui permet de transformer des expressions et de prouver par exemple que « Pour tout nombre x , $(x-2)(x+4)-x^2 = 2x-8$ ».

b) Déroulement

L'activité ci-dessous a été proposée en 4^e et en 3^e et a occupé une séance d'une heure.

Pour les questions 1 et 2, les élèves ont travaillé en binôme (niveaux homogènes). Chaque groupe n'a eu à traiter qu'une des propositions, imposée par l'enseignante en fonction du niveau des élèves. Elles sont toutes distribuées. La proposition (d) (existentielle fausse) est proposée à de « bons » binômes. Une fois la première réponse validée par l'enseignante, les élèves peuvent choisir une 2^e proposition à traiter au choix. À quinze minutes de la fin de la séance ils arrêtent de chercher afin de faire un bilan en groupe classe en complétant les tableaux des parties 3 et 4.

Le QCM permet de réinvestir les connaissances acquises.

c) Fiche élève de l'activité « Calcul littéral et quantifications »

Démonstrations et calcul littéral

1. Travail en groupe, chaque groupe sur une proposition.

Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et le prouver :

- (a) « Il existe un nombre x tel que $(x+5)^2 = x^2 + 5^2$ »
- (b) « Pour tout nombre x , $(x+5)^2 = x^2 + 5^2$ »
- (c) « Pour tout nombre x , $(x-2)(x+4) - x^2 = 2x - 8$ »
- (d) « Il existe un nombre entier x tel que $3+2x$ est pair »

2. Quelle méthode avez-vous utilisée pour prouver votre résultat ?

	Vrai	Faux	Méthode
« Il existe un nombre x tel que $(x+5)^2 = x^2 + 5^2$ »			
« Pour tout nombre x , $(x+5)^2 = x^2 + 5^2$ »			
« Pour tout nombre x , $(x-2)(x+4) - x^2 = 2x - 8$ »			
« Il existe un nombre entier x tel que $3+2x$ est pair »			

3. Classez les 4 propositions dans un tableau et indiquer les méthodes employées (en bilan groupe classe) :

	Proposition Vraie	Proposition Fausse
Pour tout nombre x , « quelque chose qui dépend de x »	Proposition :	Proposition :
	Méthode(s) :	Méthode(s) :
Il existe un nombre x , « quelque chose qui dépend de x »	Proposition :	Proposition :
	Méthode(s) :	Méthode(s) :

4. Méthode générale :

	Pour prouver que la proposition est Vraie	Pour prouver que la proposition est Fausse
Pour tout nombre x , « quelque chose qui dépend de x »		
Il existe un nombre x , « quelque chose qui dépend de x »		

QCM : Pour chacune des affirmations suivantes, dire si l'affirmation est vraie ou fausse et cocher la méthode adaptée pour le prouver (dans le cas où il faut trouver un exemple, le donner)

n°	Affirmation	Vraie/ Fausse	Trouver un exemple	Garder les variables et utiliser le calcul littéral
1	« Il existe un nombre x tel que $(x+4)^2 = x^2 - 8x + 16$ »			
2	« Pour tout nombre x , $(x+4)^2 = x^2 - 8x + 16$ »			
3	« Pour tout nombre x , $(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$ »			
4	« Il existe un nombre x tel que $(x + 4)^2 = x^2 + 16$ »			
5	« Il existe un nombre x tel que $(x + 2)(-x - 2) = x^2 - 4$ »			
6	« Pour tout nombre x , $(x + 2)(-x - 2) = x^2 - 4$ »			
7	« Il existe un nombre entier x tel que $5x + 26$ est un multiple de 5 »			
8	« Il existe un nombre entier x tel que $7x + 14$ est un multiple de 7 »			
9	« Pour tout nombre entier x , $7x + 14$ est un multiple de 7 »			
10	« Pour tout nombre entier a multiple de 2, pour tout nombre entier b multiple de 3, $a + b$ est un multiple de 5 »			

d) Éléments de correction et réponses d'élèves

• **Correction de la question 1.**

Les propositions (a) à (c) ne posent pas trop de problème aux élèves.

1. « Il existe un nombre x tel que $(x+5)^2 = x^2 + 5^2$ » est vraie, les élèves trouvent l'exemple facilement.
2. « Pour tout nombre x , $(x+5)^2 = x^2 + 5^2$ » est fausse et les élèves trouvent un contre-exemple facilement.
3. « Pour tout nombre x , $(x-2)(x+4) - x^2 = 2x - 8$ » est vraie. Certains élèves ont seulement proposé des exemples alors que d'autres ont justifié leur réponse en utilisant le calcul littéral ¹⁷.

La proposition (d) : « Il existe un nombre entier x tel que $3+2x$ est pair » pose plus de problèmes.

En 3^e, les élèves essayent un certain nombre de valeurs de x pour tester la véracité de la proposition. Convaincus que cette proposition est fausse, ils tentent de montrer que pour tout x , $3+2x$ est impair sans dire pourquoi ils s'intéressent à cette proposition universelle. Rapidement et dans la majorité des groupes, ils affirment que la somme d'un entier pair et d'un entier impair est « forcément » impair.

L'enseignante demande alors aux élèves de prouver cette proposition et commence par leur faire caractériser les entiers pairs et les entiers impairs, en profitant de l'occasion pour écrire les deux implications associées à une équivalence :

« Pour tout entier n , n est pair si et seulement s'il existe un entier k tel que $n = 2k$ »

Ce qui signifie que pour tout entier n ,

- si n est pair alors il existe un entier k tel que $n=2k$
- s'il existe un entier k tel que $n=2k$ alors n est pair

Les élèves terminent ensuite la démonstration de l'imparité de la somme en utilisant le calcul littéral.

En 4^e, pour montrer que (d) est fausse, un des groupes propose une autre stratégie de preuve de « pour tout x entier, $3 + 2x$ est impair ». Les calculs sont faits en donnant à x les valeurs entières de 0 à 9 et les élèves constatent que les résultats obtenus se terminent par les chiffres 1, 3, 5, 7 ou 9 et sont donc impairs. Ils en déduisent que pour tout nombre x le résultat du calcul se terminera alors « forcément » par les chiffres 1,

¹⁷ Si trois essais suffisent pour prouver que deux expressions de degrés au plus deux sont toujours égales, les élèves de collège ne le savent en général pas. Il peut être intéressant de leur faire remarquer qu'un essai de plus que le degré de l'expression permet en réalité de répondre à la question pour leur donner des moyens de contrôle. Pour les problèmes de degré 1, le lien avec les droites du plan et leurs intersections permet de justifier la méthode.

3, 5, 7 ou 9 et sera donc « forcément » impair. L'enseignante indique aux élèves que le « forcément » nécessite une démonstration.

Pour isoler le chiffre des unités Les élèves ont eu l'idée d'utiliser la décomposition décimale des entiers. Comme ils avaient une bonne intuition, l'enseignante leur a suggéré de se ramener, pour tout nombre x , à une écriture de la forme $x=10k+r$ où k est un entier naturel et r un entier compris entre 0 et 9 (division euclidienne par 10). Elle permet d'isoler, le chiffre des unités de x .

$$\begin{aligned} 3 + 2x &= 3+2(10k+r) \\ &= 3+20k+2r \\ &= 2 \times 10k + (3+2r) \end{aligned}$$

avec r compris entre 0 et 9.

Les élèves ont ainsi pu utiliser leurs résultats précédents et faire une preuve par disjonction des cas.

Bien entendu, la complexité de cette dernière démonstration proposée par des élèves de 4^e est liée au fait qu'au collège, la parité et l'imparité sont définis à partir du chiffre des unités et non à partir du reste de la division euclidienne par 2 (ce qui malgré tout peut être abordé en 3^e comme nous l'avons vu).

À l'issue de cette séance en 4^e il a été demandé aux élèves de terminer la rédaction de la preuve de la négation de la proposition (d), à la maison. Le bilan a été fait à l'heure suivante.

- **Bilan en groupe classe**

C'est l'objet des questions 3 et 4, dont la synthèse est faite à partir des résultats des différents binômes regroupés dans un même tableau.

	Proposition Vraie	Proposition Fausse
Pour tout nombre x , « quelque chose qui dépend de x »	Proposition : « Pour tout nombre x , $(x-2)(x+4)-x^2=2x-8$ »	Proposition : « Pour tout nombre x , $(x+5)^2=x^2+5^2$ »
	Méthode(s) : Calcul littéral	Méthode(s) : Un exemple suffit $X=1$
Il existe un nombre x , « quelque chose qui dépend de x »	Proposition : « Il existe un nombre x tel que $(x+5)^2=x^2+5^2$ »	Proposition : « Il existe un nombre entier x tel que $3+2x$ est pair »
	Méthode(s) : Un exemple suffit $X=0$	Méthode(s) : Calcul littéral

Après avoir classé les propositions étudiées dans le tableau, les élèves, aidés si besoin de l'enseignante, décrivent les méthodes de preuves utilisées (calcul littéral ou exemple). Une méthode « générale » est alors établie, récapitulée dans le tableau ci-dessous :

Tableau des « pour prouver » (ce tableau est à rapprocher du carré des oppositions page 17) :

	Pour prouver que la proposition est Vraie	Pour prouver que la proposition est Fausse
Pour tout nombre x , « quelque chose qui dépend de x »	Un exemple où c'est vrai ne suffit pas. Garder x !	Un exemple où c'est faux suffit.
Il existe un nombre x , « quelque chose qui dépend de x »	Un exemple où c'est vrai suffit.	Un exemple où c'est faux ne suffit pas. Garder x !

Deux points sont soulignés :

- ce n'est pas parce qu'un exemple suffit à prouver qu'une propriété est vraie ou fausse que celui-ci est facile à trouver. Il est parfois nécessaire d'utiliser le calcul littéral (équations, inéquations...) pour trouver l'exemple qui servira à la preuve.
- Ce n'est pas non plus parce qu'on ne trouve pas un exemple qu'il n'en existe pas. Parfois il faut prouver qu'il n'y a pas d'exemple (existentielle fausse).

La méthode pour prouver qu'une proposition existentielle est fausse nécessite souvent de revenir sur sa justification, ce qui est fait à partir de l'exemple de la proposition

(d) « Il existe un nombre entier x tel que $3+2x$ est pair »

Les élèves ont naturellement tenté de montrer que « pour tout nombre entier x , $3+2x$ est impair » est vraie c'est à dire que « pour tout nombre entier x , $3+2x$ est non pair » est vraie.

Il est important de faire comprendre aux élèves que montrer qu'une proposition existentielle est fausse revient à montrer que sa négation est vraie¹⁸. Or la négation d'une proposition existentielle est une proposition universelle, et montrer qu'une proposition universelle est vraie se fait par le calcul littéral ici.

- **Utilisation du tableau des « Pour prouver »**

C'est l'objet du QCM, qui fait suite au bilan en classe. Les élèves ont fait ce travail en devoir à la maison. Nous en donnons ici la correction proposée ensuite. Les démonstrations utilisant le calcul littéral sont explicitées. Pour les questions 1, 4 et 5, les exemples peuvent être déterminés à l'aide des techniques de résolution d'équations et donc du calcul littéral.

¹⁸ Ce qu'on peut aborder par exemple avec l'activité Quadrilatères, ou à partir d'exemples hors contexte mathématique, du type « Il existe un élève absent » : dire que cette proposition est fausse est équivalent à dire que « Tous les élèves sont présents » est vraie.

n°	Affirmation	Vrai/Faux	Trouver un exemple	Garder x et utiliser le calcul littéral
1	« Il existe un nombre x tel que $(x+4)^2=x^2-8x+16$ »	V	$x=0$	
2	« Pour tout nombre x, $(x+4)^2=x^2-8x+16$ »	F	$x=1$	
3	« Pour tout nombre x, $(x+4)^2=x^2+8x+16$ »	V		×
4	« Il existe un nombre x tel que $(x+4)^2=x^2+16$ »	V	$x=0$	
5	« Il existe un nombre x tel que $(x+2)(-x-2)=x^2-4$ »	V	$x=0$	
6	« Pour tout nombre x, $(x+2)(-x-2)=x^2-4$ »	F	$x=1$	
7	« Il existe un nombre entier x tel que $5x+26$ est un multiple de 5 »	F		×
8	« Il existe un nombre entier x tel que $7x+14$ est un multiple de 7 »	V	$x=1$	
9	« Pour tout nombre entier x, $7x+14$ est un multiple de 7 »	V		×
10	« Pour tout nombre entier a multiple de 2, pour tout nombre entier b multiple de 3, a+b est un multiple de 5 »	F	$a=4; b=9$ $a+b=13$	

Bien entendu, le tableau des « pour prouver » peut être adapté à la géométrie. Il permettra ainsi aux élèves de savoir quand un exemple suffit pour prouver un résultat et quand un raisonnement utilisant des propriétés ou des théorèmes est requis.

4) Tableau récapitulatif des activités

Les temps indiqués dans ce tableau peuvent vous paraître très longs. L'enseignante qui a proposé la plupart de ces activités a effectivement choisi d'y consacrer ces temps importants, notamment en proposant des synthèses qui vont assez loin sur les notions de logique, mais qui sont par conséquent assez longues. Il est bien sûr possible de réduire le temps consacré à chaque activité, soit en ne faisant qu'une partie de l'activité, soit en réduisant le temps consacré à la correction, selon l'objectif visé avec sa classe.

Titre de l'activité	Proposée en classe de...	Durée de l'activité	Principales notions travaillées
Sac de boules	6 ^e , mais intéressante aussi au-delà.	1 heure	Quantification, négation, propositions équivalentes
Quadrilatères	5 ^e , mais intéressante aussi au-delà.	1h pour la première partie, puis 1h30 pour la deuxième (dont des temps assez longs de synthèse, qui peuvent bien sûr être réduits).	Quantification, négation, propositions équivalentes. Caractérisation du rectangle par les angles droits.
Divisibilité	3e, mais la première partie peut être proposée dès la 6 ^e .	1h en classe, puis à la maison pour la première partie. Puis synthèse d'1h, avant travail à la maison pour la deuxième partie, et de nouveau synthèse d'1h.	Connecteurs ET, OU, négation. Condition nécessaire, condition suffisante. Critères de divisibilité, propriétés de divisibilité par un produit. Nombres premiers, nombres premiers entre eux.
Calcul littéral et quantifications	4 ^e et 3 ^e .	1h30.	Proposition universelle, proposition existentielle, et quantificateurs. Types de preuve associés aux différentes formes de propositions.

IV. Annexes

Table des matières

Page 77 : Énoncé version 2 de l'activité Sacs de boules (description page 46).

Page 78 : Énoncé complet version 2 de l'activité Quadrilatères (description page 46).

Page 82 : Solutions de l'activité Quadrilatères

Page 84 : Énoncé complet de l'activité Divisibilité (description page 59).

Page 87 : Thalès dans les éléments d'Euclide (description page 34)

Page 88 : A la recherche du bon théorème : figures (description page 42)

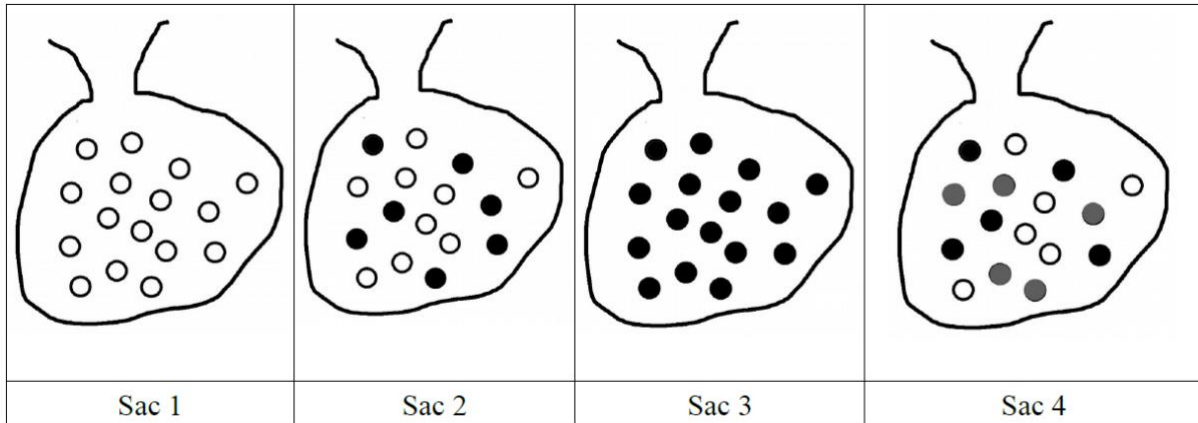
Page 90 : A la recherche du bon théorème : énoncé version numéro 1

Page 91 : A la recherche du bon théorème : énoncé version numéro 2

Page 92 : A la recherche du bon théorème : énoncé version numéro 3

Activité Sacs de boules

Voici 4 schémas de sacs contenant des boules blanches, grises ou noires :



Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F) pour chaque sac :

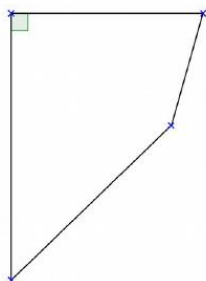
	Dans le sac 1	Dans le sac 2	Dans le sac 3	Dans le sac 4
Toutes les boules sont blanches.				
Il y a au moins une boule non blanche.				
Aucune boule n'est blanche.				
Il existe une boule blanche.				
Toutes les boules ne sont pas blanches.				
Les boules ne sont pas toutes blanches.				
Toutes les boules sont non blanches.				

Activité Quadrilatères

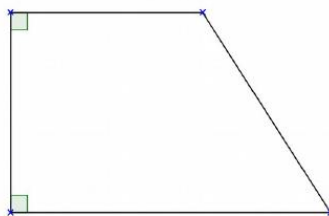
A) Voici 4 schémas de quadrilatères :



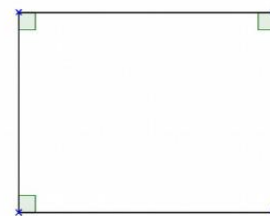
Quadrilatère 1



Quadrilatère 2



Quadrilatère 3



Quadrilatère 4

Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F) pour chaque quadrilatère :

		Quadrilatère 1	Quadrilatère 2	Quadrilatère 3	Quadrilatère 4
1	Tous les angles du quadrilatère sont droits.				
2	Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.				
3	Aucun angle du quadrilatère n'est droit.				
4	Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.				
5	Tous les angles du quadrilatère sont non droits.				
6	Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.				
7	Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.				

B) Possible ou impossible ?

1) Est-il possible de construire un quadrilatère tel que le tableau suivant est vérifié. Si oui dessiner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible :

Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F	
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	F	
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F	

2) Est-il possible de construire un quadrilatère tel que le tableau suivant est vérifié. Si oui dessiner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible :

Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F	
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F	

3) Est-il possible de construire un quadrilatère tel que le tableau suivant est vérifié. Si oui dessiner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible :

Tous les angles du quadrilatère sont droits.	F	
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	V	
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	V	
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	F	
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	V	
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	

4) Est-il possible de construire un quadrilatère tel que le tableau suivant est vérifié. Si oui dessiner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible :

Tous les angles du quadrilatère sont droits.	F	
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	V	
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	F	
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	F	
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	

5) Est-il possible de construire un quadrilatère tel que le tableau suivant est vérifié. Si oui dessiner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible :

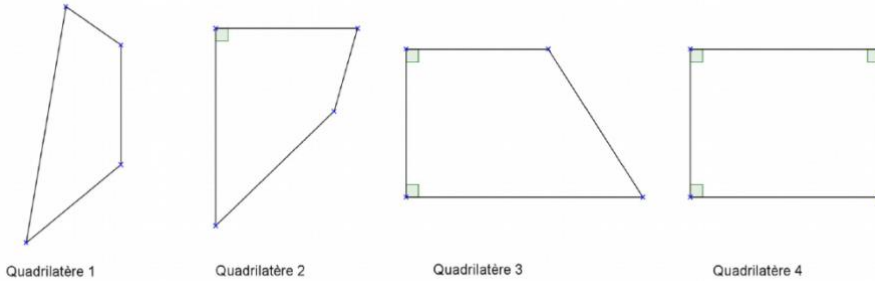
Tous les angles du quadrilatère sont droits.	F	
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	V	
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	V	
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	V	
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	

6) Est-il possible de construire un quadrilatère tel que le tableau suivant est vérifié. Si oui dessiner un exemple. Sinon, expliquer pourquoi ce n'est pas possible :

Tous les angles du quadrilatère sont droits.	V	
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	F	
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	V	
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	F	
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	V	
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	F	

Solutions de l'activité Quadrilatères

A) Voici 4 schémas de quadrilatères :



Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie (V) ou fausse (F) pour chaque quadrilatère :

	Quadrilatère 1	Quadrilatère 2	Quadrilatère 3	Quadrilatère 4
Tous les angles du quadrilatère sont droits.	F	F	F	V
Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit.	V	V	V	F
Aucun angle du quadrilatère n'est droit.	V	F	F	F
Il existe un angle du quadrilatère qui est droit.	F	V	V	V
Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits.	V	V	V	F
Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits.	V	V	V	F
Tous les angles du quadrilatère sont non droits.	V	F	F	F

B) Possible ou impossible ?

1) 4 angles droits : rectangle

2) pas de solution (« tous les angles du quadrilatère sont droits » et « les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits » ne peuvent pas être vrais en même temps, incompatibilité 1-6)

3) aucun angle droit

4) au moins un angle droit, au moins un angle non droit

5) pas de solution (Aucun angle du quadrilatère n'est droit et il existe un angle du quadrilatère qui est droit ne peuvent être vrais en même temps ; incompatibilité 3-4 ou « Il y a au moins un angle du quadrilatère qui est non droit » et « Les angles du quadrilatère ne sont pas tous droits » doivent avoir la même valeur de vérité, équivalence 2-6)

6) pas de solution (« Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits » vrai et « Il existe un angle du quadrilatère qui est droit » faux en même temps est impossible, implication 1-4, « Tous les angles du quadrilatère ne sont pas droits » et « Aucun angle du quadrilatère n'est droit » ne peuvent pas être vraies en même temps, incompatibilité 1-3)

Activité Divisibilité

A. Divisibilité de 2, 5, et 10

Exercice A1

1°) Rappeler le critère de divisibilité par 5.

.....

2°) Comment caractériser les nombres entiers non divisibles par 5 ?

.....

Exercice A2 (calculatrice interdite)

1°) Pour chacun des nombres suivants : 315; 4864; 730 ; 5610; 955 ; 561 et 30,

- le ranger dans le tableau de gauche s'il est divisible par 10 et dans le tableau de droite sinon,

- répondre par « oui » ou par « non » aux questions « Ce nombre est-il divisible par 2 ? » et « Ce nombre est-il divisible par 5 ? ».

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?

2°) Compléter les tableaux suivants en proposant quand c'est possible un nombre qui convienne :

Nombres divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
	Oui	Oui
	Oui	Non
	Non	Oui
	Non	Non

Nombres non divisibles par 10		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 5 ?
	Oui	Oui
	Oui	Non
	Non	Oui
	Non	Non

3°) Recopier et compléter les propriétés suivantes pour qu'elles soient vraies :

- Les nombres entiers qui sont divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 par 5.

- Les nombres entiers qui ne sont pas divisibles par 10 sont ceux qui par 2 par 5.

B. Divisibilité de 2, 3, et 6 (calculatrice autorisée)

1°) Pour chacun des nombres suivants : 312; 4863; 732 ; 5610; 952 ; 561 ; 36 ; 12543 ; et 721
 - le ranger dans le tableau de gauche s'il est divisible par 6 et dans le tableau de droite sinon,
 - répondre par « oui » ou par « non » aux questions « Ce nombre est-il divisible par 2 ? » et
 « Ce nombre est-il divisible par 3 ? ».

Nombres divisibles par 6		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 3 ?

Nombres non divisibles par 6		
Nombre	Est-il divisible par 2 ?	Est-il divisible par 3 ?

2°) Recopier et compléter la propriété suivante pour qu'elle soit vraie :

Les nombres entiers qui sont divisibles par 6 sont ceux qui sont divisibles par 2 par 3.

C. Divisibilité de 3, 5, et 15 (calculatrice autorisée)

1°) Pour chacun des nombres suivants : 315; 4864; 730 ; 5610; 955 ; 561 ; 30;6993 ; 7245 et 835

- le ranger dans le tableau de gauche s'il est divisible par 15 et dans le tableau de droite sinon,
 - répondre par « oui » ou par « non » aux questions « Ce nombre est-il divisible par 3 ? » et
 « Ce nombre est-il divisible par 5 ? ».

Nombres divisibles par 15		
Nombre	Est-il divisible par 3 ?	Est-il divisible par 5 ?

Nombres non divisibles par 15		
Nombre	Est-il divisible par 3 ?	Est-il divisible par 5 ?

2°) Recopier et compléter la propriété suivante pour qu'elle soit vraie :

Les nombres entiers qui sont divisibles par 15 sont ceux qui sont divisibles par 3 par 5.

D. Conjecture et discussion

Nous avons vu que :

A) Les nombres entiers qui sont divisibles par 10 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 5.

B) Les nombres entiers qui sont divisibles par 6 sont ceux qui sont divisibles par 2 et par 3.

C) Les nombres entiers qui sont divisibles par 15 sont ceux qui sont divisibles par 3 et par 5.

À la suite de ces résultats, comment aurais-tu envie de compléter la propriété suivante ?

Les nombres entiers qui sont divisibles par 12 sont ceux qui sont divisibles
par et par

Reproduis le test des exercices A, B, C pour tester cette propriété :

Pour chacun des nombres suivants : 312 ; 5610 ; 732 ; 952 ; 1244 ; 36 ; 102 et 975

- le ranger dans le tableau de gauche s'il est divisible par 12 et dans le tableau de droite sinon,

- répondre par « oui » ou par « non » aux questions « Ce nombre est-il divisible par ? »
et « Ce nombre est-il divisible par ? ».

Nombres divisibles par 12		
Nombre	Est-il divisible par ?	Est-il divisible par ?

Nombres non divisibles par 12		
Nombre	Est-il divisible par ?	Est-il divisible par ?

Que penses-tu finalement de la propriété que tu as complétée pour 12 ?

Théorème de Thalès : Éléments d'Euclide

Source : <https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k68013q/f220>

ELEMENT.

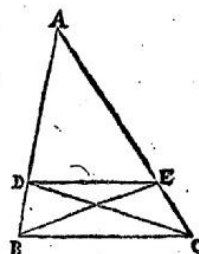
215

THEOR. 2. PROP. II.

Si on mène vne ligne droicte parallele à l'un des costez d'un triangle, laquelle coupe les deux autres costés ; elle les coupera proportionnellement : & si deux costés d'un triangle sont coupez proportionnellement, la ligne coupante sera parallele à l'autre costé.

Soit le triangle ABC, dans lequel soit menée la ligne droicte DE parallele au costé BC, couppant les deux autres costez AB & AC aux points D & E. Je dis que les costez AB, AC sont coupez proportionnellement aux points D & E, c'est à dire que AD sera à DB, comme AE est à EC.

Car estans menées les deux lignes BE & CD : par la 37. p. 1. les deux triangles DEB & EDC, estans sur mesme base, & entre mesmes paralleles, sont egaux ; & par la 7. p. 5. ils auront mesme raison l'un comme l'autre au troisieme ADE. Mais par la 1. p. 6. les triangles DEB & DEA, estans de mesme hauteur, sont l'un à l'autre comme la base BD à la base DA : & par la mesme proposition, le triangle CDE, estant de mesme hauteur qu'iceluy triangle EDA, ils seront aussi l'un à l'autre, comme CE est à EA : & partant par la 11. p. 5. BD sera à DA, comme CE à EA : (puisque ces deux raisons sont les mesmes que du triangle BED au triangle DEA, & du triangle CDE au mesme triangle DEA.) Ce qui estoit proposé.



Pour la seconde partie : je dis que si DB est à DA, comme CE à EA, la ligne coupante DE sera parallele au costé BC.

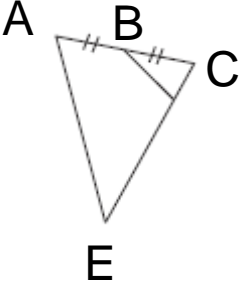
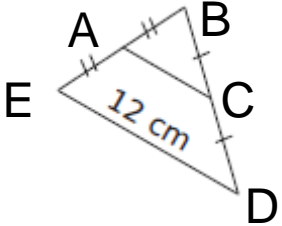
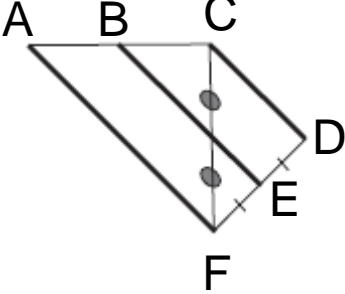
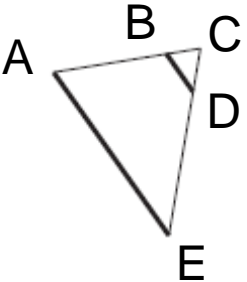
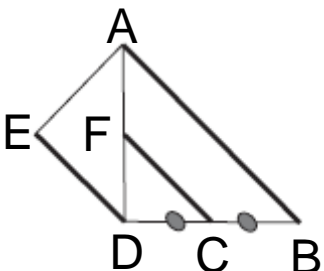
Car les triangles DEB & DEA, seront par la 1. p. 6. l'un à l'autre, comme DB à DA. Item les deux autres triangles CDE, EDA, seront aussi l'un à l'autre, comme CE à EA : & par la 11. p. 5. le triangle DEB sera au triangle DEA, comme le triangle CDE est au mesme triangle DEA : & par la 9. p. 5. les deux triangles BED, & EDC seront egaux, lesquels estans sur mesme base DE, par la 39. p. 1. ils seront entre mesmes paralleles : & partant DE sera parallele à BC. Parquoy si l'on mène vne ligne parallele à l'un des costez d'un triangle, &c. Ce qu'il falloit demonstret.

THEOR. 3. PROP. III.

Si l'angle d'un triangle est couppé en deux egalemt par vne ligne droicte, laquelle coupe aussi la base ; les segmens de la base seront l'un à l'autre comme les autres costez du triangle : Et si les segmens de la base sont l'un à l'autre comme les autres costez du triangle ; la ligne droicte

À la recherche du bon théorème : figures

N°	Figure	Th. 1	Th. 2	Th. 3	Conclusion
1					
2					
3					
4					
5					

N°	Figure	Th. 1	Th. 2	Th. 3	Conclusion
6					
7					
8					
9					
10					

À la recherche du bon théorème (1)

a. Sur les figures suivantes, les droites repassées en gras sont parallèles. Indique, si possible dans le tableau, un théorème que tu peux utiliser pour obtenir des informations complémentaires sur la figure parmi les trois théorèmes suivants et indique la conclusion que tu peux en tirer :

Théorème 1 : « Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. »

Théorème 2 : « Dans un triangle, si un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté. »

Théorème 3 : « Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté. »

b. Colorie en vert le triangle que tu utilises pour l'application du théorème.

À la recherche du bon théorème (2)

a. Sur les figures suivantes, les droites repassées en gras sont parallèles. Indique, si possible dans le tableau, les théorèmes que tu peux appliquer parmi les trois théorèmes suivants et indique pour chaque théorème la conclusion que tu peux en tirer :

Théorème 1 : « Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. »

Théorème 2 : « Dans un triangle, si un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté. »

Théorème 3 : « Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté. »

b. Colorie en vert le triangle que tu utilises pour l'application des théorèmes.

À la recherche du bon théorème (3)

a. Sur les figures suivantes, les droites repassées en gras sont parallèles. Indique, dans le tableau pour chaque théorème :

- la conclusion de son application s'il est possible de l'appliquer.
- qu'il est non - applicable s'il n'est pas possible de l'appliquer en justifiant la réponse.

Théorème 1 : « Dans un triangle, si une droite passe par les milieux de deux côtés alors elle est parallèle au troisième côté. »

Théorème 2 : « Dans un triangle, si un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté. »

Théorème 3 : « Dans un triangle, si une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un second côté alors elle passe par le milieu du troisième côté. »

b. Colorie en vert le triangle que tu utilises pour l'application des théorèmes.

V. Index

Calcul littéral, 28, 68, 72
carré des oppositions, 18, 19, 54, 73
Carré des pour prouver, 73
Conjonction, 11, 29
contraposée, 8, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 28, 37, 39, 42
disjonction, 11, 22, 29, 72
Divisibilité, 28, 59, 60, 64, 65, 84, 85
équations produits, 31
Équivalence, 15, 37
ET/OU, 31
existentielle, 17, 23, 68, 73
Implication, 12, 34
Inégalités, 12, 31
Négation, 10, 28, 33
noms, 8, 9, 23, 26, 43
propositions, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17, 18, 19, 22, 23, 24, 25, 26, 28, 31, 33, 41, 46, 47, 50, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 68, 69, 71, 73, 77, 78, 82
propriété caractéristique, 37, 38, 40, 64
propriétés caractéristiques, 37, 38, 59
quantification, 23, 28, 34, 40, 41, 42, 43, 49
quantifications universelles, 24
Réciproque, 14, 34
si et seulement si, 11, 40
Thalès, 15, 34, 36, 87
universelle, 17, 18, 28, 40, 41, 42, 43, 49, 68, 71, 73
variables, 8, 9, 23, 26, 27, 28, 40, 41

VI. Bibliographie et sitographie

[1] R. Blanché (1997) *La logique et son histoire, d'Aristote à Russell*, Armand Colin.

[2] Daniel Lacombe (2007) *Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la logique et qu'on n'a jamais voulu vous révéler*, Séminaire de l'IREM de Paris du 6 juin 2007.

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/videos/tout_ce_que_vous_avez_toujours_voulu_savoir_sur_la_logique/

[3] Programmes de lycée :

- Classe de seconde (2009) :
http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf
- Classe de première S (2010) :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_9/21/1/mathsS_155211.pdf
- Classe de terminale S (2011) :
http://cache.media.education.gouv.fr/file/special_8_men/98/4/mathematiques_S_195984.pdf
- Document ressource pour la classe de seconde - Notations et raisonnement mathématiques (2009) :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/18/0/Doc_ressource_raisonnement_109180.pdf

[4] - Groupe logique de l'IREM de Paris (2014) *Les connecteurs ET et OU dans les programmes de lycée*. PLOT n°45

- Groupe logique de l'IREM de Paris (2014) *Au collège comme au lycée : une activité sur les connecteurs ET et OU*. PLOT n°45

[5] Hérault Françoise, Huet Catherine, Kel-Notter Géraldine et Mesnil Zoé (2016) *Quelques activités de logique dans nos classes*, Petit x n°100

[6] Programmes de collège :

- Programmes de cycles 2, 3, 4
http://cache.media.education.gouv.fr/file/MEN_SPE_11/35/1/BO_SPE_11_26-11-2015_504351.pdf
- Document Ressource cycle 4 – Raisonner (2016) :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Competences_travaillees/83/6/RA16_C4_MATH_raisonner_547836.pdf
- Document d'accompagnement - Raisonnement et démonstration (2009) :
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/50/0/doc_acc_clg_raisonnementetdemonstration_223500.pdf

[7] René Cori, Cours Langage Mathématiques à l'université Paris Diderot :

http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/les_documents_du_cours_langage_mathematique_en_l1_r_cori/

[8] Zoé Mesnil (2014) *La logique : d'un outil pour le langage et le raisonnement mathématique vers un objet d'enseignement*, thèse disponible sur HAL :
<https://hal.archives-ouvertes.fr/tel-01114281>

[9] Hache Christophe, Forgeux Emmanuelle (2018) *Vrai ou faux ? Parlons-en !* Au Fil des Maths n°528
<https://afdm.apmep.fr/rubriques/ouvertures/vrai-ou-faux-parlons-en/>

[10] Document d'accompagnement cycles 3 et 4 – Mathématiques et maîtrise de la langue
http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Ressources_transversales/99/6/R_A16_C3C4_MATH_math_maitr_lang_N.D_600996.pdf

[11] Rui Dos Santos, Anne-Laure Artigalas, Christophe Béasse, Françoise Braun, Anne Devys, Stéphanie Favero, Marie-Dominique Grisoni, Marie-Christine Lévi, Sabine Marduel, Charles Philippe, Catherine Reynier, Pascale Rouzé, Hélène Trévisan (2016) Manuel *Dimensions mathématiques cycle 4*; ed. Hatier

[12] Guilhem Autrand, Olivier Beer, Serge Bertrand, Christelle Charton, Bertrand Cortial, Romain Flouret, Mohammed Hayouni, Sophie Heber-Suffrin, Valérie Hernandez-Burgun, Soufiane Karbal, Alexandra Kolodziej, Lionel Lambotte, Pierre Latron, Chloé Pineau, Cédric Sébisch, Luc Trescol (2016) Manuel *Delta mathématiques cycle 4*; ed. Belin

[13] « Fiches du professeur 6^e. » de l'IREM de BREST :
<http://publimath.irem.univ-mrs.fr/biblio/IBR99002.htm>

[14] Démonstrations animées du théorème de Thalès :

- Site des éditions Kangourou <http://www.mathkang.org/swf/thales.html>
- Site de Thérèse Éveilleau http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/truc_mat/textes/euclide_thales.htm

[15] Cahier Sésamath 4^e (2015)
http://mep-outils.sesamath.net/manuel_numerique/?ouvrage=cm4_2011

[16] Viviane Durand-Guerrier, Maryvonne Le Berre, Marie-Claude Pontille, Josette Reynaud-Feurly (2000) *Le statut logique des énoncés dans la classe de maths (éléments d'analyse pour les enseignants)*. Brochure de l'IREM de Lyon