



Nombres rationnels (1)

Définition :

Un **nombre rationnel** est le **quotient d'un entier relatif par un entier relatif non nul**.

Autrement dit, un nombre x est rationnel, s'il existe un entier relatif a et un entier relatif b différent de 0, tel que : $x = \frac{a}{b}$.

Dans cette écriture fractionnaire, a est appelé le numérateur et b le dénominateur.

Exemples : $\frac{-3}{2}$; $\frac{-2}{-7}$; $\frac{6}{8}$; $\frac{10}{2}$... sont des nombres rationnels.

Contre-exemples : tu connais des nombres qui ne sont pas rationnels (la démonstration n'est pas au programme de 4^{ème}) : $\sqrt{2}$ et π ne sont pas des nombres rationnels.

Signe d'un rationnel :

- Si le **numérateur et le dénominateur** ont un **signe différent**, le **nombre rationnel est négatif**.

Dans ce cas, on évite d'écrire le signe '-' au dénominateur.

On préférera faire porter le signe '-' au numérateur ... :

$$\frac{2}{-7} = \frac{-2}{7}$$

...ou l'écrire devant la barre de fraction :

$$\frac{2}{-7} = -\frac{2}{7}$$

- Si le **numérateur et le dénominateur** ont le **même signe**, le **nombre rationnel est positif**.

Dans ce cas, on choisira l'écriture avec un numérateur et un dénominateur positifs.

$$\frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}$$

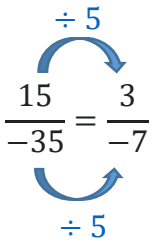
Exemples : trouve le signe des nombres rationnels suivants et écris-les comme suggéré précédemment :

$\frac{9}{-5} =$	$\frac{-6}{-5} =$	$\frac{-1}{-9} =$
$\frac{-(-7)}{-12} =$	$\frac{2}{-(-3)} =$	$\frac{-6}{-(-12)} =$

Différentes écritures d'un nombre rationnel

Propriété : Si un nombre rationnel est écrit sous forme fractionnaire, on **ne change pas sa valeur en multipliant (ou en divisant) son numérateur et son dénominateur par un même nombre différent de 0**.

Exemple corrigé : on nous demande de compléter

$\frac{15}{-35} = \frac{\dots}{-7}$	On cherche par combien on a divisé le dénominateur. $-35 : (-7) = 5$
	Puisque le dénominateur a été divisé par 5, pour conserver l'égalité, on divise le numérateur par 5. $15 : 5 = 3$ On fait apparaître l'opération effectuée à l'aide de flèche.

Remarque : si on nous avait demandé de simplifier l'écriture du rationnel, on aurait pu rédiger l'exercice d'une autre façon

$\frac{15}{-35} = -\frac{15}{35}$	On cherche le signe du rationnel et on le fait apparaître devant la barre de fraction.
$\frac{15}{-35} = -\frac{15}{3 \times 5}$ $= -\frac{15}{7 \times 5}$	On décompose numérateur et dénominateur en produits de facteurs, de façon à faire apparaître des facteurs communs.
$\frac{15}{-35} = -\frac{15}{3 \times 5}$ $= -\frac{3}{7 \times 5}$ $= -\frac{3}{7}$	On divise numérateur et dénominateur par 5 car 5 est un facteur commun. Pour symboliser cette division, on raye le facteur 5 dans chaque produit. $5 : 5$ est en effet égal à 1 et 1 est neutre pour le produit (il ne change pas sa valeur).

Exemples : complète

$\frac{9}{-5} = \frac{\dots}{-30}$	$\frac{-6}{-5} = \frac{18}{\dots}$	$\frac{27}{-12} = \frac{-9}{\dots}$
------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------

Propriétés : Soient a, b, c et d des entiers relatifs différents de zéro.

- Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = c \times b$.
- Si $a \times d = c \times b$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Cette égalité « $a \times d = c \times b$ » est appelée « égalité des produits en croix ».

Démonstration : Soient a, b, c et d des entiers relatifs différents de zéro

- Supposons que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Cette égalité reste vraie si on multiplie chaque membre par b.

$$\frac{a}{b} \times b = \frac{c}{d} \times b$$

Par définition du quotient de a par b : $\frac{a}{b} \times b = a$

Donc $a = \frac{c}{d} \times b$

Multiplions chaque membre de l'égalité par d :

$$a \times d = \frac{c}{d} \times b \times d$$

Par commutativité de la multiplication :

$$a \times d = \frac{c}{d} \times d \times b$$

Et par définition du quotient de c par d : $\frac{c}{d} \times d = c$

Donc $a \times d = c \times b$.

- Supposons que $a \times d = c \times b$

$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d}$ d'après la propriété précédente en multipliant numérateur et dénominateur par d

$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d}$ car on a supposé l'égalité des produits en croix vraie

$\frac{a}{b} = \frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{b \times d} = \frac{c}{d}$ d'après la propriété précédente en divisant numérateur et dénominateur par b

Questions flash : Egalité de rationnels et produits en croix



- | | |
|----------|-----------|
| 1) | 6) |
| 2) | 7) |
| 3) | 8) |
| 4) | 9) |
| 5) | 10) |



<https://www.youtube.com/watch?v=IeT2StE4uxA>

Questions flash : Egalité de rationnels (2)

https://www.youtube.com/watch?v=d3ucJi8AoNc&ab_channel=MathsetJeux



- | | |
|----------|-----------|
| 1) | 6) |
| 2) | 7) |
| 3) | 8) |
| 4) | 9) |
| 5) | 10) |



Propriétés (admisses) : Soient a, b, c et d des entiers relatifs différents de zéro.

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors

$a = \frac{b \times c}{d}$	$b = \frac{a \times d}{c}$	$c = \frac{a \times d}{b}$	$d = \frac{b \times c}{a}$
----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

Réciproquement si l'une des 4 égalités du tableau est vraie, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.



- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)



<https://www.youtube.com/watch?v=INzxrTE3okE>

Simplification d'écritures fractionnaires

Exemple détaillé : On veut simplifier $\frac{140}{-264}$

- 1) On réécrit la fraction avec un numérateur et un dénominateur positif, en écrivant éventuellement le signe '-' devant la barre de fraction

$$\frac{140}{-264} = -\frac{140}{264}$$

- 2) on décompose le numérateur et le dénominateur en produits de facteurs premiers

$$\frac{140}{-264} = -\frac{140}{264} = -\frac{2 \times 2 \times 5 \times 7}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 11}$$

- 3) On divise numérateur et dénominateur par tous les facteurs communs

$$\frac{140}{-264} = -\frac{140}{264} = -\frac{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 5 \times 7}{\cancel{2} \times \cancel{2} \times 2 \times 3 \times 11} = -\frac{5 \times 7}{2 \times 3 \times 11} = -\frac{35}{66}$$

Exemples : simplifie l'écriture des nombres rationnels suivants :

$\frac{60}{-66} =$	$\frac{-540}{75} =$	$\frac{-360}{-297} =$
--------------------	---------------------	-----------------------

Produit de deux nombres rationnels

Pour **multiplier deux nombres rationnels**, on **multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux**.

Si a, b, c et d sont des entiers relatifs (avec b et d non nuls), alors :

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$$

Exemple détaillé : calcule le produit des nombres rationnels suivants :

$\frac{7}{-6} \times \frac{-5}{-3} =$	<p>On commence par trouver le signe de ce rationnel : on compte le nombre de signes négatifs : il y en a 3, 3 est un nombre impair donc le produit des deux rationnels est négatif.</p>
$\frac{7}{-6} \times \frac{-5}{-3} = -\frac{7 \times 5}{6 \times 3}$	<p>On écrit le signe '-' devant la barre de fractions. Au numérateur, on écrit les produits des valeurs absolues des numérateurs, et au dénominateur, on écrit les produits des valeurs absolues des dénominateurs.</p>
$\frac{7}{-6} \times \frac{-5}{-3} = -\frac{7 \times 5}{6 \times 3}$ $= -\frac{35}{18}$	<p>Si on ne voit pas de simplification à faire (facteurs communs au numérateur et au dénominateur), on calcule les produits.</p>

Exemples : calcule les produits de nombres rationnels suivants :

$\frac{-8}{-15} \times \frac{-2}{-3} =$	$\frac{5}{11} \times \frac{5}{-3} =$	$\frac{12}{-5} \times \frac{2}{-5} =$
---	--------------------------------------	---------------------------------------

Questions flash : Produit de deux rationnels

https://www.youtube.com/watch?v=mhqkXUYZiYs&ab_channel=MathsetJeux



- | | |
|----------|-----------|
| 1) | 6) |
| 2) | 7) |
| 3) | 8) |
| 4) | 9) |
| 5) | 10) |



Avec cette méthode, calcule puis simplifie :

$$\frac{-70}{-45} \times \frac{-32}{-28} =$$

Quelle remarque peux-tu faire sur ce calcul ? Aurait-on pu procéder autrement ?

Exemple corrigé :

$\frac{-70}{-45} \times \frac{-32}{-28} =$	On commence par trouver le signe de ce rationnel : on compte le nombre de signes négatifs : il y en a 4, 4 est un nombre pair donc le produit des deux rationnels est positif.
$\frac{-70}{-45} \times \frac{-32}{-28} = \frac{70 \times 32}{45 \times 28}$	Inutile d'écrire le signe '+' devant la barre de fractions. Au numérateur, on écrit les produits des valeurs absolues des numérateurs, et au dénominateur, on écrit les produits des valeurs absolues des dénominateurs.
$\frac{-70}{-45} \times \frac{-32}{-28} = \frac{70 \times 32}{45 \times 28}$ $= \frac{2 \times 7 \times 5 \times 4 \times 8}{3 \times 3 \times 5 \times 4 \times 7}$	On décompose les facteurs en produits de facteurs plus petits (si c'est possible). Pour cela, on utilise trois méthodes au choix : <ul style="list-style-type: none"> • Les tables de multiplication « à l'envers » • Les critères de divisibilité • La décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers
$\frac{-70}{-45} \times \frac{-32}{-28} = \frac{70 \times 32}{45 \times 28}$ $= \frac{2 \times \cancel{7} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times 8}{3 \times 3 \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times \cancel{7}}$ $= \frac{2 \times 8}{3 \times 3}$ $= \frac{16}{9}$	On divise le numérateur et le dénominateur par leurs facteurs communs. On termine en calculant les produits restants.

Exemples : calcule les produits de nombres rationnels suivants, en simplifiant avant si possible :

$\frac{-36}{15} \times \frac{-40}{-18} =$	$\frac{42}{48} \times \frac{16}{-9} =$	$\frac{12}{-15} \times \frac{25}{-30} =$
---	--	--



Exercice : donne une écriture simplifiée des produits

$$\frac{-36}{15} \times \frac{-40}{-18} =$$

$$\frac{42}{48} \times \frac{16}{-9} =$$

$$\frac{12}{-15} \times \frac{25}{-30} =$$

https://www.youtube.com/watch?v=b5pd2J3cweg&ab_channel=MathsetJeux



Classe Genially :



<https://view.genial.ly/61f526f7b021450012aeef49>

Juliette Hernando <https://juliettehernando.com> Hors du cadre de la classe, aucune reproduction (textes ou images) ne peut être faite sans mon autorisation.