REFLEXIONS SUR LES QUADRILATERES ET LEUR ENSEIGNEMENT

Julien BERNAT
IECL
Inspé de Lorraine

Introduction

En proposant le mot-clé « quadrilatères » à un moteur de recherche, on obtient de nombreuses représentations différentes, certaines étant incompatibles. La variété de ces propositions augmente encore en étendant la recherche à d'autres langues. Cela peut sembler étrange dans la mesure où l'on s'attend généralement à ce que les relations entre objets mathématiques, et surtout ceux considérés comme élémentaires, ne fassent pas l'objet de tels désaccords. Aussi, nous allons passer en revue les arguments qui permettent d'expliquer en quoi le point de vue selon lequel il y aurait une unique classification acceptable (les autres pouvant alors être considérées au mieux incomplètes) n'est pas satisfaisant, en présentant les principaux éléments permettant de guider le professeur lorsqu'il prépare un apprentissage des quadrilatères ; nous en profiterons pour faire une synthèse des travaux existants sur le sujet, en mentionnant un certain nombre de recherches réalisées sur ce domaine d'étude ainsi que celles restant à mener.

Les questions importantes auxquelles le professeur est confronté pour enseigner la géométrie sont : que faut-il enseigner, avec quels objectifs, à quel niveau, et quelles sont les principales étapes à respecter et motivations à faire apparaître (la question du comment relevant plus de la pédagogie que des concepts mathématiques proprement dits). On identifie également rapidement la question de savoir comment concilier au mieux la structuration de l'enseignement des connaissances requis à un niveau donné avec les sauts provoqués par les changements de paradigmes géométriques qui apparaissent au cours de la scolarité. On pourrait adjoindre à cela, concernant les quadrilatères : lesquels doivent être enseignés, comment les introduire, comment les définir, quelles propriétés doivent être étudiées, tout en accordant une attention particulière aux choix didactiques dans la conception de manuels scolaires, ainsi qu'à l'évolution des programmes officiels.

Le travail à mener sur ces interrogations est considérable, sans même évoquer une étude comparative des différents systèmes d'enseignements, francophones ou non. Il ne sera pas question ici de faire un état des lieux complet ni d'apporter des réponses définitives. Nous pouvons noter que certaines questions se posent déjà avec l'étude du triangle, toutefois le nombre restreint de triangles particuliers permet d'arriver rapidement à leur description exhaustive, alors que le monde des quadrilatères est incroyablement plus fourni.

De nombreux travaux, la plupart récents, se sont intéressés aux niveaux de conceptualisation et de représentation des familles de quadrilatères chez différentes catégories de populations : les enfants ou élèves à différents âges, avec des études couvrant l'ensemble de la scolarité (par exemple, [7], [31], [4], [33], [47]), et les apprentis-professeurs ou professeurs expérimentés du primaire et du secondaire (voir [46], [44], [38], [16], [51], [52] ou encore [24]). Ces études concernent un nombre important de pays différents, et ont en commun de s'appuyer sur les travaux de Van Hiele afin d'estimer le niveau de compréhension des objets géométriques. Ces travaux font apparaître que des proportions non négligeables d'étudiants pourtant avancés dans la scolarité, ainsi que de futurs professeurs du primaire ou du secondaire, n'ont pas atteint un niveau de maîtrise leur permettant de s'interroger sur la façon dont les objets sont définis et sur leurs interdépendances, ce qui pénalise leur compréhension générale du cadre géométrique.

Définition exclusive, définition inclusive

Réfléchir à la façon dont on enseigne la géométrie amène obligatoirement à saisir la différence entre l'utilisation de définitions exclusives et inclusives. On pourrait définir (!) une *définition exclusive* comme une définition qui interdit à un objet de vérifier des propriétés additionnelles à celles le définissant, donc lui interdisant d'appartenir à une classe restreinte d'objets plus particuliers. Par exemple, on pourrait proposer comme définition exclusive du rectangle celle d'un quadrilatère ayant quatre angles droits et possédant deux paires de côtés opposés de mêmes dimensions, les longueurs de ces paires étant différentes (on préciserait alors que, conventionnellement, celle de plus grande mesure est appelée longueur, et celle de plus petite mesure largeur). Cette définition correspondrait, dans une *version inclusive*, à celle de la définition d'un rectangle non carré. Pour les différencier, on parle habituellement de *hiérarchie* pour une classification inclusive et de *partition* pour une classification exclusive.

Des auteurs, comme De Villiers [10], ou Craine et Rubenstein [8], détaillent les principaux bénéfices que l'on peut tirer du cadre inclusif :

— il est plus économique de définir les objets et de formuler les théorèmes dans le cadre inclusif,

— le cadre inclusif simplifie l'utilisation du raisonnement déductif, que ce soit concernant les implications entre propriétés, ou des combinaisons logiques comme l'intersection de classes d'objets caractérisés par leurs propriétés,

— le cadre inclusif amène naturellement à s'interroger sur les façons de définir des objets et permet de mieux comprendre les liens logiques entre ces définitions,

— le cadre inclusif fournit une meilleure compréhension globale des objets géométriques et de leurs propriétés.

L'usage de définitions exclusives amène des relations de dépendance entre classes d'objets, ce qui les rend bien moins simples à manier. En effet, comme nous venons de le voir, le « rectangle exclusif » correspond en version inclusive aux rectangles non carrés. Supposons que l'on décide de donner un nom particulier aux rectangles pour lesquels le rapport entre longueur et largeur est un nombre rationnel et donnons leur le nom de ratiorectangles. Les « rectangles exclusifs » deviennent alors au sens inclusif les rectangles non ratiorectangles et non plus les rectangles non carrés. Avec une définition inclusive, on vient juste de définir un ensemble R' tel que $R \subset R' \subset C$, avec R l'ensemble des rectangles et C l'ensemble des carrés, et il reste de la place pour définir autant de nouvelles classes (parties) qu'on le souhaite ou dont on aurait besoin, sans que cela n'ait d'influence sur les objets préalablement introduits.

Cet argument empêche de régler la question par la simple utilisation des adjectifs large et strict : si les seuls quadrilatères connus sont les rectangles et les carrés, alors il ne serait pas difficile de donner un sens précis au « rectangle (au sens) strict » et au « rectangle (au sens) large », mais la possibilité d'introduire de nouvelles classes d'objets à l'envi montre la limite de cette tentative.

Pour autant, on ne peut pas qualifier d'incorrecte la démarche consistant à utiliser des définitions exclusives, qui se défend davantage aux niveaux auxquels les objets géométriques sont visualisés ou analysés sans compréhension de liens logiques. Une règle tacite en mathématiques est qu'en général, on ne définit pas un objet en invoquant une propriété qu'il ne satisfait pas. Cela peut pourtant arriver tout particulièrement en géométrie, où l'on peut demander aux polygones de ne pas être constitués d'au moins trois sommets consécutifs alignés, ou pire, de sommets confondus, afin de ne pas avoir à gérer des cas pathologiques comme les triangles et quadrilatères aplatis (certains auteurs utilisent la dénomination quadrangle pour éviter ces cas dégénérés) ; un autre exemple classique étant de s'interdire de considérer le cas du triangle équilatéral pour pouvoir évoquer la droite d'Euler. On pourra par ailleurs noter qu'il existe des propriés spécifiques à certaines figures exclusives ; nous renvoyons le lecteur à [48] pour l'étude d'une propriété dans un trapèze devant avoir exactement une paire de côtés parallèles. D'autres exemples de ce genre, comme le parallélogramme formé par les intersections des médiatrices d'un parallélogramme (réduit à un point lorsque formé à partir d'un rectangle), finissent de montrer qu'un cadre « purement inclusif » n'est pas la solution parfaite permettant de clôre le débat.

Dans [40], Politzer interroge le rôle de la langue, plus adaptée pour décrire les relations exclusives que celles qui sont inclusives, avec pour exemple caractéristique la question « est-ce un rectangle ou un carré ? », l'usage contrastif des noms invoquant une représentation en disjonction de classes qui ne correspond pas à la hiérarchie souhaitée. L'auteur revient sur l'étude des organisation lexicales à différents niveaux chez les élèves en distinguant les organisations conceptuelles naïve et savante, qu'il illustre aussi par la mention aux ensembles de nombres avec l'erreur-type fréquente des nombres entiers qui ne sont pas reconnus comme décimaux (puisque perçus comme des « nombres sans virgule »). On peut aussi citer les travaux de Dupuch et Sander [17] confortant l'idée qu'un apprentissage précoce de hiérarchisation des informations chez les élèves de primaire ait des effets positifs sur l'acquisition et la compréhension des concepts. Leur étude ne se restreint pas aux mathématiques et peut concerner d'autres champs disciplinaires, avec par exemple, la catégorisation des verbes en CE2 ([18]). Aussi, Drouard [13] étudie les possibilités de construire les structures et liens logiques inhérentes au travail de catégorisation à l'école primaire sur le thème du vivant.

12. Un *quadrilatère* est un polygone de quatre côtés. Parmi les quadrilatères, on distingue :

Le *carré* qui a ses quatre côtés égaux et ses angles droits ;

Le *rectangle*, qui a ses angles droits sans avoir ses côtés égaux ;

Le *parallélogramme*, dont les côtés opposés sont parallèles ;

Le *losange*, qui a ses côtés égaux sans avoir ses angles droits ;

Le *trapèze*, dont deux côtés seulement sont parallèles.

Figure 1 : extrait du manuel « Géométrie » par J. Dufailly, sixième édition de 1883

Le recours au cadre exclusif a historiquement été privilégié dans l'enseignement des objets géométriques, Euclide ayant défini de la sorte les quadrilatères (voir Figure 1 pour un exemple de la fin du 19e siècle). Il semble que même après la révolution conceptuelle provoquée par la théorie des ensembles, plusieurs systèmes d'enseignement aient continué à perpétuer cette approche. Ce point ne sera pas détaillé ici (il mériterait de l'être !).

L'action de définir et son usage

De nombreux auteurs manifestent des réserves quant à une approche qualifiée de traditionnelle, qui consiste à énumérer des définitions et mettre en place un système déductif pour obtenir les propriétés des objets introduits, le principal reproche étant qu'un apprentissage correct de *la* définition d'un objet ne garantit aucunement la compréhension de cet objet, ni la réexploitation appropriée des connaissances qui y sont liées dans un contexte qui le permet. Pour reprendre en particulier [12], la donnée d'un ensemble de définitions peut éluder certains aspects importants, tels que la compréhension du rôle que doit jouer une définition et des qualités qui sont attendues, comme l'économie (i.e. ne mentionner que ce qui est strictement nécessaire pour désigner un objet, ce qui par exemple n'est pas le cas pour « un rectangle est un quadrilatère avec quatre angles droits et des diagonales de même longueur »).

Selon ce point de vue, il est important de permettre aux élèves de développer la capacité à proposer une *bonne* définition d'un objet mathématique, puisque cela participe grandement à l'avancement au niveau de compréhension des définitions formelles. On peut également constater avec Vinner [49] que la différenciation entre les statuts de définition, d'axiome et de théorème n'est pas innée et nécessite d'être travaillée avec les élèves (il serait d'ailleurs intéressant d'étudier l'évolution de la présence du mot « définition » dans les manuels scolaires !). L'importance de savoir définir des objets mathématiques est sans doute encore plus grande dans le cadre de la géométrie élémentaire, au sens où plusieurs définitions équivalentes d'un même objet peuvent être recevables, comme le note Turnau [45] sur le cas particulier du trapèze isocèle, ce qui est potentiellement source de conflit lorsque l'élève n'a pas été sensibilisé à la compréhension des équivalences et des outils nécessaires permettant de les expliciter.

Nous renvoyons le lecteur aux travaux de De Villiers [10] pour des considérations sur les deux principales méthodes menant à la création de définition, celle descriptive (ou méthode *a posteriori*, la définition arrivant après une phase de familiarisation avec des connaissances non formalisées) et celle constructive (ou méthode *a priori*, dont le but est de faire émerger de nouveaux objets, en s'appuyant sur le cadre déductif), ainsi qu'aux travaux d'Ouvrier-Buffet, par exemple [34].

Les quadrilatères et leurs propriétés

Un travail très approfondi concernant les principaux quadrilatères et leurs propriétés usuelles a été réalisé par Ususkin, Griffin, Witonsky et Willmore dans [48]. Les auteurs ont étudié les définitions proposées par un grand nombre de manuels scolaires des Etats-Unis sur une longue période, en confrontant et discutant leurs choix. Nous ne reprendrons ici qu'une partie de ces éléments, en commençant par des généralités, avant d'aborder des classes spécifiques de quadrilatères, et nous ne pouvons que suggérer au lecteur de consulter cet ouvrage incontournable sur le sujet. Des recherches avec des manuels d'autres pays ont aussi été réalisées, par exemple dans [3] qui détaille une analyse comparée de définitions du rectangle issues de manuels scolaires en Turquie.

Deux expressions sont parfois utilisées dans les programmes officiels et les manuels scolaires : celle de « quadrilatère particulier » (la liste des qualificatifs possibles supposés équivalents étant assez longue : remarquable, spécial, spécifique, usuel, etc.) et celle de « propriété(s) d'un [type de] quadrilatère ». Lorsque tel est le cas, aucune de ces deux expressions n'est jamais explicitée ; seule la liste des noms de quadrilatères à aborder à un niveau donné est fournie, sans mentionner la question de *sa* définition (puisque le mot apparaît généralement au singulier !) ou quelles propriétés seront étudiées (voir Figures 2, 3, 4, 5, 6). Les possibilités sont pourtant suffisamment nombreuses pour qu'il soit nécessaire de clarifier ce domaine d'investigation. Comme cela est référencé dans [48], les possibles définitions de quadrilatère et de polygone sont nombreuses, bien que souvent passées sous silence. Aussi, des manuels font

Quadrilatères : *convexe, concave* ou *croisé*.

Quadrilatères particuliers : *trapèze; parallélogramme rectangle; losange; carré.* Ces quadrilatères peuvent être définis ou construits au moyen de *bandes*.

Propriétés du *rectangle*, du *triangle rectangle*, du *losange*, du *carré*.

Figure 2 : extrait des programmes de l'enseignement du second degré, arrêtés du 30 août 1937 et 14 avril 1938

Définition de polygones : quadrilatère, trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.
Propriétés du rectangle, du triangle rectangle, du losange, du carré. Constructions.
Somme des angles d'un triangle, d'un quadrilatère convexe.

Figure 3 : extrait du manuel ”arithmétique et algèbre géométrie” de Brachet et Dumarqué pour les classes de cinquième A et B et première année d'enseignement primaire supérieur, programme officiel (30 août 1937 et 14 avril 1938)

Définition de polygones: quadrilatère, trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.
Propriétés du parallélogramme, du rectangle, du losange, du carré. Constructions.

Figure 4 : extrait du Journal Officiel de l'Etat Français du 25 septembre 1941, page 4121

Définition de polygones : quadrilatère, trapèze, parallélogramme, rectangle, losange, carré.
Propriétés du parallélogramme, du rectangle, du triangle rectangle (médiane relative à l'hypoténuse), du losange ; théorèmes réciproques.

Figure 5 : extrait du programme du 18 avril 1947 relatif aux classes de quatrièmes (classique A et B et moderne)

IV. — Quadrilatères particuliers; propriétés des angles du trapèze; propriétés des angles, des côtés, des diagonales du parallélogramme, du rectangle, du losange du carré; propriétés réciproques.

Figure 6 : extrait de programme (31 juillet 1958 et 26 octobre 1964) pour la classe de quatrième

parfois le choix tacite de se restreindre aux cas des quadrilatères convexes sans se donner la peine d'expliquer cette notion.

Si l'on se contente de dire qu'un quadrilatère particulier est un quadrilatère satisfant une propriété particulière, on n'est guère avancé ; la tâche d'identifier et de hiérarchiser toutes les propriétés pouvant être formulées est tout sauf aisée. Un quadrilatère ayant des diagonales perpendiculaires est-il plus digne d'intérêt qu'un quadrilatère ayant des longueurs toutes rationnelles, ou bien des mesures d'angles toutes multiples de 15◦ ? Notons au passage que la langue française ne contient pas l'intégralité des dénominations permettant d'identifier les quadrilatères et leurs propriétés les plus notables : le quadrilatère inscriptible ne porte pas de nom spécifique, et la propriété pour une diagonale d'intersecter l'autre diagonale en son milieu n'est pas nommée de façon standardisée.

On peut également évoquer ici la notion de « quadrilatère quelconque ». Ce dernier existe-t-il vraiment ? Aussitôt choisi, le quadrilatère quelconque possède des longueurs et des angles qui sont bien spécifiques, indépendamment du fait d'avoir pu formaliser ce qui peut être admis ou non comme particulier. Remarquons également que la tâche de déterminer la nature d'un quadrilatère, grand classique parmi les exercices de géométrie, est dépendante de la liste des quadrilatères connus. Là encore, on pourra noter une grande diversité des dénominations employées pour désigner les ensembles de quadrilatères portant le même nom, ou bien l'un des représentants de ces ensembles : classe, forme, nature, sorte, type, etc., dont on ne connaît d'ailleurs aucune définition !

En considérant indistinctement livres, articles, manuels et programmes, les propriétés des quadrilatères qui sont les plus fréquemment évoquées sont :

— présence de longueurs de côtés égales : aucune, 2 opposées, 2 adjacentes, 3 ou 4 (2 opposées et 2 adjacentes pouvant être satisfaites deux fois)

— présence d'angles égaux : aucun, 2 opposés, 2 adjacents, 3 ou 4 (2 opposés et 2 adjacents pouvant être satisfaites deux fois)

— parallélisme de côtés opposés (une ou deux paires)

— présence d'angles droits aux sommets (entre une et quatre fois)

— diagonales perpendiculaires

— diagonales de même longueur

— inscriptibilité dans un cercle

— circonscriptibilité dans un cercle (on nomme le quadrilatère *circonscriptible* ou *tangentiel*)

— bissection de diagonale : une diagonale coupe l'autre en son milieu (une ou deux fois)

On pourrait encore mentionner la présence d'angles supplémentaires, une ou plusieurs fois, concernant des angles adjacents ou opposés. Les égalités de longueurs ou d'angles apparaissent parmi les propriétés les plus souvent citées, leur identification faisant partie des tâches les plus accessibles pour les élèves dans le registre de la géométrie instrumentée.

Grünbaum a établi dans [27] la liste complète des vingt quadrilatères possibles relativement aux critères d'égalité de longueurs et d'angles, que l'on peut également retrouver dans [9] et [2]. La tâche d'étendre la recherche des objets possibles en croisant cette classification avec les autres propriétés serait particulièrement pénible (à la fois à établir, mais aussi à représenter de façon lisible !), par exemple en s'intéressant aux diagonales comme le fait Kacaba dans [30].

Il n'est pas clair que d'autres propriétés que celles mentionnées soient attendues ou puissent être citées dans le cadre d'enseignement défini par les programmes (par exemple, le fait qu'un rectangle soit inscriptible ou qu'un losange soit circonscriptible). On note également que les attentes ne sont pas précisées concernant la construction de figure : s'agit-il de la connaissance d'une technique de construction particulière ou de la recherche exhaustive des différentes techniques possibles (en lien avec des propriétés attendues) ?

Nomenclature des quadrilatères

Les mathématiciens utilisent principalement trois « méthodes » permettant de nommer un objet :

— lui associer le nom d'un mathématicien ayant contribué de façon notable à sa définition ou compréhension (que l'on peut qualifier de méthode historique),

— former un nom par dérivation (que l'on peut qualifier de méthode étymologique),

— utiliser le langage courant lorsque l'objet y fait référence.

La première méthode, familière pour de nombreux objets mathématiques (noms de théorèmes, d'espaces, d'équations, etc.), est en revanche très peu utilisée pour les quadrilatères. On peut citer le cas du quadrilatère de Khayyam (ou Saccheri, ou Thabit), ainsi que celui de Lambert, qui font référence aux travaux tentant infructueusement de prouver le postulat des parallèles et méritent un intérêt approfondi dans les mondes géométriques non euclidiens, mais n'ont pas de réelle utilité en géométrie élémentaire. On peut aussi associer un nom à une figure apparaissant dans une configuration particulière, comme par exemple le parallélogramme de Varignon, dont les sommets sont les milieux des côtés d'un quadrilatère donné.

La méthode étymologique est très fréquente, mais n'est pas employée de manière systématique ni uniforme. On se contentera de mentionner les irrégularités de la liste triangle, quadrilatère, parallélogramme, polygone, en invitant le lecteur intéressé par ce sujet à consulter par exemple les travaux de Camenisch et Petit [5]. On notera que l'utilisation de noms issus de la langue courante n'est pas intemporelle et qu'elle est soumise à des évolutions. Cela peut concerner la graphie avec le quarré devenue carré, ou le nom avec les exemples du tétrapleure ou tétragone et du rhombe. Nous renvoyons le lecteur à [22] pour davantage de considérations historiques.

Le carré

L'étude effectuée dans [48] fait apparaître que dans la majorité des cas, le carré n'est pas le premier quadrilatère introduit, avec une définition qui s'appuie sur un autre quadrilatère préalablement défini (on peut qualifier cette approche de définition solidarisée, par opposition a une définition indépendante telle que : les longueurs des côtés sont toutes égales et les angles sont tous égaux).

Les définitions les plus fréquentes sont : un rectangle avec quatre côtés congrus (dans une étude d'ouvrages français, il pourrait apparaître *de même longueur* ou *égaux*), un rectangle avec deux côtés consécutifs congrus ou un parallélogramme qui est à la fois un rectangle et un losange.

Le rectangle

Toujours selon [48], les manuels s'appuient généralement sur le parallélogramme pour proposer une définition du rectangle, mais ce n'est pas toujours le cas, avec pas moins de huit définitions référencées. Le lecteur pourra chercher à identifier les éléments mathématiques permettant de démontrer l'équivalence entre un quadrilatère ayant des angles tous égaux et un parallélogramme ayant un angle droit.

Le losange

Le losange était encore connu sous la dénomination rhombe (ou rhombus) au début du siècle dernier. Citons quelques-unes des possibilités le concernant :

— présenté comme un quadrilatère dont les quatre côtés sont égaux (de même longueur),

— introduit à la suite d'un chapitre sur la symétrie axiale comme une quadrilatère possédant deux axes de symétrie passant par ses sommets (des sommets opposés),

— défini après la notion de parallélogramme comme un parallélogramme ayant deux côtés consécutifs égaux (de même longueur).

Le parallélogramme

Il est majoritairement défini comme le quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles. Cette définition évite les risques d'oublis de la convexité nécessaire lorsque l'on souhaite plutôt introduire des égalités de longueurs de côtés opposés, uniquement ou en complément du parallélisme.

A la différence d'autres quadrilatères remarquables, la place du parallélogramme dans les programmes officiels n'est pas restée constante. On note par exemple qu'il est cité dans les programmes de 1985 pour le cours moyen, pour disparaître des programmes du primaire jusqu'à ce jour.

Le cerf-volant

Citons quelques exemples tirés de manuels français pour illustrer des choix quant au cerf-volant :

— « un quadrilatère qui a deux paires de côtés consécutifs de même longueur » dans le manuel « math » pour la classe de sixième, collection prisme, Belin, édition de 2005 (illustré par deux figures, un quadrilatère convexe et un autre concave),

— « un cerf-volant a deux petits côtés consécutifs de même longueur et deux grands côtés également de même longueur » dans le manuel « maths » pour la classe de sixième des éditions Bréal de 2005, illustré par une seule figure convexe,

— « un quadrilatère ayant deux paires de côtés consécutifs de même longueur et dont les diagonales se coupent à l'intérieur » selon le manuel « maths » pour la classe de sixième, collection Zéphyr aux éditions Bordes en 2009

On peut deviner avec ce dernier exemple que les auteurs ont choisi d'imposer la condition de convexité de façon implicite puisqu'aucune mention n'y est faite. On pourrait encore citer l'approche par la symétrie qui est privilégiée par Drouin dans [14].

Il semble que chez la plupart de nos voisins, le cerf-volant ait une place plus importante que dans le système français. Le lecteur trouvera avec Perrin-Glorian [37] des considérations additionnelles montrant qu'une fois de plus le choix est vaste, mais que cette fois-ci les possibilités de définitions non équivalentes sont plus importantes que précédemment.

Remarquons que la dénomination de cerf-volant n'est pas entièrement standardisée. Selon certains auteurs dont Gérald [26], le cerf-volant est un quadrilatère caractérisé par une invariance sous une symétrie affine (l'axe passant par deux sommets opposés), et mérite le qualificatif d'isocèle lorsque la symétrie est orthogonale. Dit autrement, ce qui mériterait le qualificatif de cerf-volant serait un quadrilatère dont la propriété est d'avoir une diagonale qui est intersectée en son milieu par l'autre diagonale (ce que l'on pourrait appeler quadrilatère à diagonale bissectée, ou plus simplement bissecté) ; visuellement, il correspondait à une vue oblique d'un cerf-volant posé au sol. Plusieurs noms anglophones ont déjà été évoqués pour cette figure, sans qu'aucun ne semble s'imposer : "sloping-kite", "sliding-kite", "slant kite" ou "bisecting quadrilaterals".

Nous renvoyons le lecteur aux travaux de Ramachandran [41], Josefsson [29] et De Villiers [11] pour se familiariser avec les principales propriétés de ce type de quadrilatère. Comme nous le verrons avec le phenomène de dualité, ce choix proposé ici, qui ne correspond pas au choix le plus fréquent, aurait l'important avantage d'être cohérent avec les notions de trapèze et trapèze isocèle.

A noter la profusion de noms francophones plus ou moins connus pour le cerf-volant non convexe dans des références suisses : chevron, deltoïde, rhomboïde, fer de lance ou encore pointe de flèche.

Le trapèze

Une proportion importante d'auteurs évoquent uniquement « deux côtés parallèles », donc *a priori* sans interdire le parallélisme pour les deux autres côtés opposés, mais dans les faits mentionnent par la suite une description de côtés *obliques*, ou précisent que l'on parle de trapèze isocèle lorsque les côtés non parallèles sont de même longueur, jetant une ambiguité sur le caractère inclusif-exclusif de cette définition. Voir aussi [25], et consulter la discussion de Perrin-Glorian relative au trapèze isocèle dans [37]. Pour une autre approche, signalons que le programme de 1958 pour la classe de quatrième (Fig. 6) semble insister sur l'égalité entre deux paires d'angles non opposés.

La langue allemande désigne également le trapèze isocèle comme le trapèze symétrique. Cette appellation est intéressante dans le seul cadre des symétries orthogonales, mais se trouve moins pertinente avec l'apparition d'autres types de symétries. Toujours pour l'anecdote, les définitions de trapezium et trapezoid sont échangées entre l'anglais britannique et l'anglais américain ; il semblerait que cela provienne d'une erreur de Charles Hutton dans son livre "Mathematical and Philosophical Dictionary" de 1795.

Représentations de la hiérarchisation

On identifie principalement deux types de représentations permettant d'expliciter les relations entre familles de quadrilatères. Une première provient des diagrammes de Venn (ou d'Euler). Une autre possibilité courante est l'utilisation de logigrammes (ou plus familièrement arbre), qui se décline en deux variantes :

— un arbre *universel*, qui décrit des relations d'inclusion étant toujours satisfaites,

— un arbre *conditionnel*, que l'on peut spécifier selon une notion ou un type d'objet particulier, qui décrit des relations d'inclusion permettant sous un ensemble de conditions supplémentaires de préciser la nature d'un quadrilatère.

L'arbre universel peut être qualifié de diagramme de Hasse selon l'ordre naturel qu'est l'inclusion sur les classes de quadrilatères.

Il existe un grand nombre de représentations possibles sous forme d'arbre universel. Une version populaire outre-Rhin mais encore assez méconnue en France est la maison des quadrilatères (Figure 7). La maison n'est pas entièrement remplie : il y a un trou au premier étage entre le cerf-volant et le quadrilatère (convexe) quelconque. Nous verrons plus loin que ce manque n'empêche pas d'illustrer le principe de dualité. Ce n'est d'ailleurs peut-être pas un mal de laisser sous-entendre

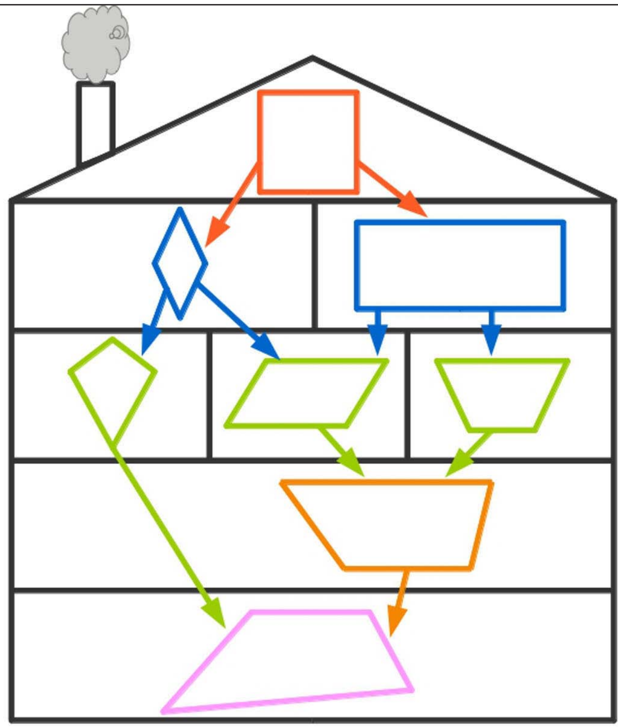


Figure 7 : La maison des quadrilatères (systèmes allemand et autrichien), illustration issue de la page internet http://www.sofatutor.at/mathematik/geometrie/geometrie-kennenlernen

que la classification n'est pas complète et qu'il reste des « pièces cachées » dans la maison ? Une deuxième remarque est que cette représentation ne respecte pas la convention habituelle des diagrammes de Hasse : la classe minimale pour l'inclusion étant celle du carré, celle-ci devrait se trouver *en bas*.

On vérifie que les « maisons complètes » usuelles de quadrilatères sont des treillis pour l'inclusion ; pour deux classes données A et B, il existe une classe minimum qui est l'intersection de A et de B. Bien que cela ne pose pas de difficulté particulière avec les classes élémentaires qui ont été précédemment citées, il n'est pas aussi évident de définir la classe maximum en toute généralité (qui n'est pas l'union des classes A et B ; par exemple, la classe au-dessus des rectangles et des losanges n'est pas la classe des « lostangles », désignant l'ensemble des figures étant l'un ou l'autre).

La direction conventionnelle de lecture d'un diagramme de Hasse est la verticale, aussi on peut se poser la question de savoir si l'on peut trouver une signification au regroupement de classes sur une même ligne (autre qu'une simple fonction de lisibilité). Il se trouve que cette interprétation existe pour les quadrilatères considérés jusqu'à maintenant : elle met en commun les objets nécessitant le même nombre de variables libres dans le cadre analytique pour définir les classes sous une contrainte commune. Plus précisément :

— on peut décrire la classe des carrés avec une seule variable : {(0; 0), (a; 0), (0; a), (a; a)},

— on peut décrire la classe des rectangles et la classe des losanges avec deux variables : {(0; 0), (a; 0), (0; b), (a, b)} et {(0; 0), (a; b), (b; a), (a + b; a + b)},

— on peut décrire la classe des trapèzes isocèles, la classe des parallélogrammes et la classe des cerf-volants isocèles avec trois variables, etc.

On retrouve l'explication des « étages » de la maison avec des quadrilatères représentés avec un même codage de couleur. A noter que l'emploi de coordonnées polaires permet d'adapter cette représentation pour y faire figurer le quadrilatère inscriptible (voir la Figure 11.14 dans [48], où l'on pourra retrouver plusieurs représentations complémentaires mobilisant le cadre cartésien).

Un arbre conditionnel peut s'interpréter comme un arbre réciproque d'un arbre universel, exprimant des conditions sous lesquelles les implications entre objets deviennent avec des propriétés additionnelles des équivalences (voir Figure 8[1]).

La représentation sous forme d'arbre possède en général la qualité d'être plus facilement lisible que celle sous forme de diagramme. Toutefois, le diagramme est plus pré-

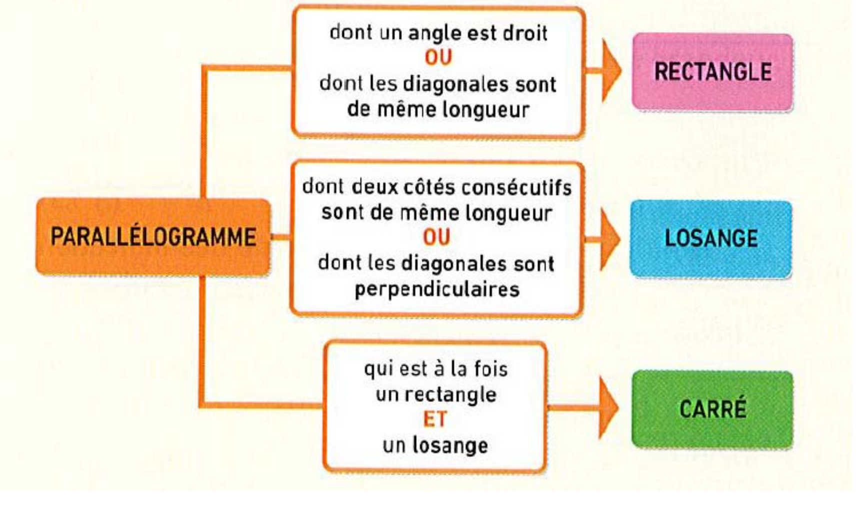


Figure 8 : extrait du manuel Kwyx pour la classe de cinquième, édition de 2016

1 une malencontreuse interversion dans la figure de ce manuel a été rectifiée ici

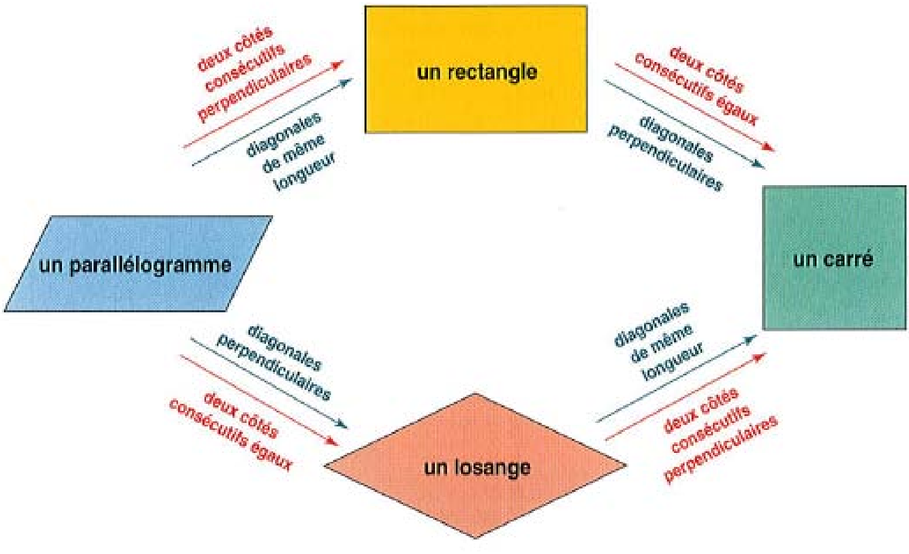


Figure 9 : extrait du manuel mathématiques pour la classe de cinquième, collection triangle, Hatier, édition de 2006

cis pour expliciter les relations entre objets : si l'on identifie dans un arbre une inclusion de A dans B et de A dans C, on peut en déduire que A est inclus dans l'intersection de B et de C, mais cela ne nous indique pas s'il y a égalité.

Il n'est pas clair qu'un arbre doive implicitement faire apparaître l'ensemble des relations directes entre objets mentionnés (on peut alors préciser arbre complet ou incomplet selon les cas) ; pour des raisons évidentes de lisibilité, la propriété de transitivité permet de ne représenter que le minimum nécessaire de relations. Par défaut, un arbre contient toujours le nom des classes, avec parfois une figure codée pour chaque classe mentionnée (Figure 9).

Parmi les arbres conditionnels, notons une présentation possible sous forme d'algorigramme, qui se comprend comme un enchaînement de décisions permettant de définir la nature la plus précise possible d'un objet en fonction des propriétés satisfaites, voir par exemple la Figure 10 de la page suivante (avec une classification exclusive).

On pourra se poser la question de savoir si la nature de la représentation joue un rôle dans la compréhension de la classification chez l'élève. Sans vouloir apporter une réponse définitive à cette question, partons de l'hypothèse que sensibiliser les élèves aux diverses représentations possibles de classification serait préférable.

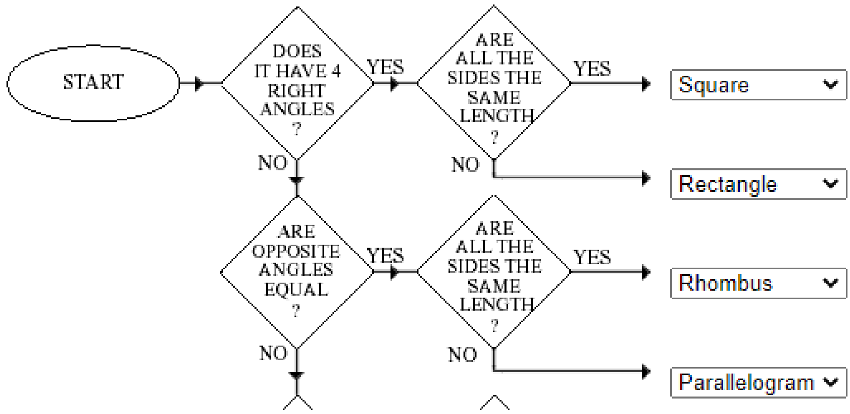


Figure 10 : Extrait d'arbre conditionnel sous forme de logigramme, tiré de la page internet : https: //www.cimt.org.uk/projects/mepres/book8/bk8i15/bk8_15i4.htm

Il n'est pas rare que des classifications proposées par des élèves fassent apparaître des mélanges entre versions exclusive et inclusive, comme De Villiers le constate dans ses discussions avec les élèves ([11]).

Nous posons l'hypothèse que l'utilisation d'une représentation avec catégorisation mixte (inclusive et exclusive) est contre-indiquée dans la perspective d'un bon apprentissage des quadrilatères. On retrouve pourtant cet usage assez fréquemment dans certains systèmes et manuels, par exemple sous le nom de « quadrilateral family tree » en Amérique, la famille étant constituée de trois branches indépendantes (une branche *principale* inclusive entre parallélogramme, losange, rectangle et carré, puis une branche trapèze-trapèze isocèle et une branche contenant seulement le cerf-volant ; parfois une dernière branche « autre » est employée).

Enfin, il peut arriver que la représentation des figures ne traduise pas les liens qui existent entre elles, et donne l'impression d'une collection d'objets placés côte-à-côte sans raison particulière, comme c'est le cas avec la Figure 1.

Evolution historique

A la fin du 19e siècle et au début du suivant, l'enseignement des figures accorde une importance particulière aux objets techniques, avec une vision utilitariste assumée. Aussi, le « point de départ » du quadrilatère correspond à un ensemble d'images d'objets du monde sensible plus ou moins connus, suivis par l'utilisation de la bande de papier. Les quadrilatères particuliers, comme le parallélogramme, sont alors formés à partir d'activités de manipulation (voir Figures 12, 13 et 14).

Pour le primaire, il faut deviner la place des quadrilatères derrière la formulation « figures géométriques simples » ; l'activité géométrique se résume alors principalement aux tracés de figures et aux calculs de grandeurs, comme cela est par

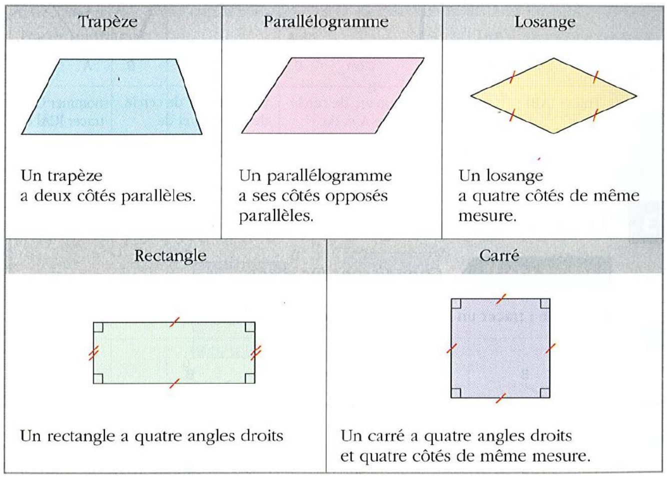


Figure 11 : extrait du manuel « mathématiques » pour la classe de sixième, collection triangle, Hatier, édition de 1998

Définition. — Nous avons déjà dit plus haut que le *quadrilatère* est un polygone de quatre côtés, ou, si l'on veut, la surface renfermée entre quatre lignes ou côtés.

Les côtés peuvent être de longueurs différentes; ils peuvent être ou ne pas être parallèles; l'ouverture des angles peut varier ; de là des quadrilatères de formes très-diverses, parmi lesquels on distingue le *trapèze* [1], le *parallélogramme* [2], le *losange* [3], le *rectangle* et le *carré*.

Trapèze. — Parmi les appareils de gymnastique se trouve une sorte de balançoire formée d'un bâton suspendu au portique par deux cordes. Les deux cordes, le bâton et la portion de la poutre comprise entre les points d'attache des cordes forment par leur ensemble un quadrilatère dans lequel deux côtés sont parallèles, celui figuré par la poutre et celui figuré par le bâton. Un pareil quadrilatère porte le nom de *trapèze;* de là le nom donné à l'appareil tout entier.

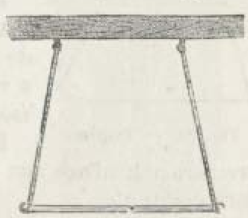


Fig. 92. — Le trapèze.

Figure 12 : extrait de « Premières notions de Géométrie » de Félix Hément et Jules Dalsème (1876)

83 *QUADRILATÈRES CONVEXES PARTICULIERS.*

Parallélogramme.

179. Définition. — *Un parallélogramme est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux.*

180. On rencontre des parallélogrammes dans la construction : tracé des mortaises pour l'assemblage dit *croix de Saint-André* (*fig.* 129), lames de parquet dans le parquet dit *à points de Hongrie* (*fig.* 130), etc. En mécanique, c'est à l'aide d'un parallélogramme que l'on détermine la résultante de deux forces

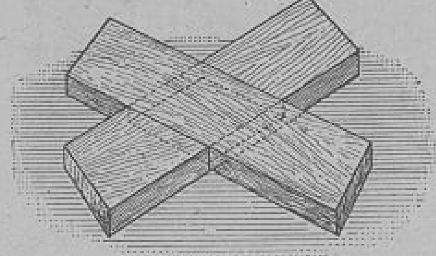


Fig. 129. — Croix de Saint-André.

Fig. 130.

(parallélogramme des forces), la résultante de deux vitesses (parallélogramme des vitesses); c'est à l'aide du parallélogramme articulé de Watt (*fig.* 131) que l'on transforme un mouvement rectiligne en mouvement circulaire (*fig.* 131).

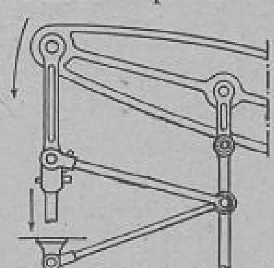


Fig. 131.

Il existe des parallélogrammes particuliers : le *losange*, le *rectangle*, le *carré* que nous étudierons plus loin. Nous établirons d'abord les propriétés générales d'un parallélogramme quelconque.

181. Dans un parallélogramme, l'un quelconque de ses côtés est appelé *base*, sa distance au côté parallèle est appelée *hauteur*.

Figure 13 : extrait de « La Géométrie à l'école primaire supérieure et au cours complémentaire » de Bouchery et Guérinet (1912)

265. Manipulation récapitulative. — Suivre d'abord sur la figure 200 l'enchaînement des définitions. — Se munir de plusieurs bandes de papier; découper dans ces bandes l'un des quadrilatères usuels en deux coups de ciseaux :

1° *Trapèze* : deux coups de ciseaux quelconques ;

2° *Parallélogramme* : deux coups de ciseaux parallèles ;

3° *Rectangle* : deux coups de ciseaux perpendiculaires aux bords de la bande ;

4° *Losange* : deux coups de ciseaux guidés par une deuxième bande de même largeur ;

5° *Carré* : deux coups de ciseaux guidés par une deuxième bande de même largeur, et perpendiculaires aux bords de la bande donnée.

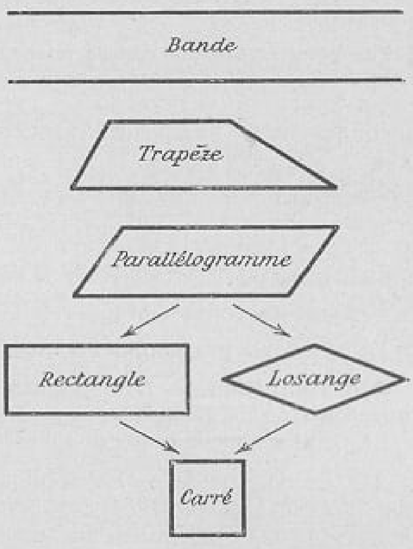


Fig. 200.

Figure 14 : extrait du manuel « Arithmétique, algèbre, géométrie » de Brachet et Dumarqué, classes de cinquième et première année d'enseignement primaire supérieur (1939)

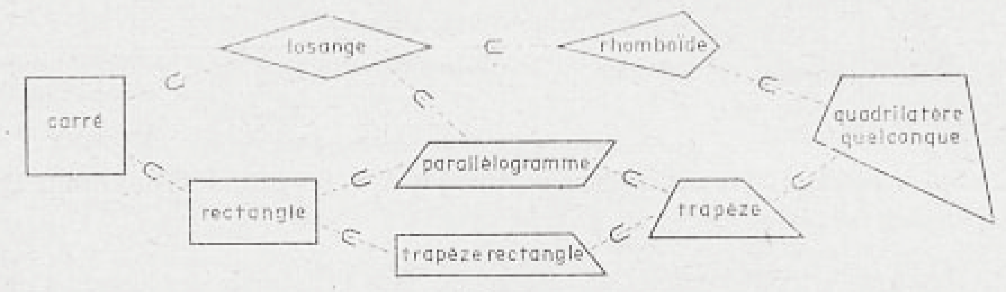


Fig. 101.

Figure 15 : extrait du manuel « géométrie seconde A', C, M, M' » de Rostolland et Guilbert, programme de 1960

Considérons les deux propriétés :

$\mathcal{D}$: avoir un angle droit;
$\mathcal{P}$: être un parallélogramme.

Soit D et P les ensembles correspondants.
Les quadrilatères qui possèdent conjointement les deux propriétés, c'est-à-dire qui possèdent la propriété :

$$\mathcal{D} \textit{ et } \mathcal{P},$$

sont les rectangles.
Ils forment un ensemble R tel que :

$$R = D \cap P.$$

A la propriété obtenue par conjonction de deux propriétés correspond le sous-ensemble obtenu par intersection des sous-ensembles définis par les deux propriétés.

EXEMPLE. Soit $\mathcal{C}$ la propriété d'avoir deux côtés consécutifs égaux et soit C l'ensemble correspondant. A la propriété $\mathcal{L}$ obtenue en faisant la conjonction $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ correspond l'ensemble :

$$L = P \cap C,$$

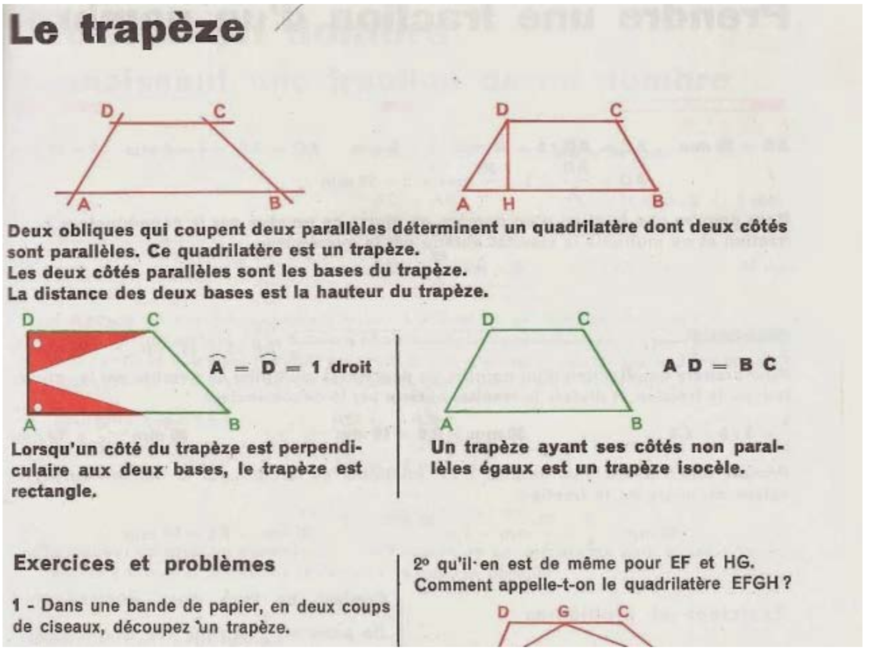
qui est l'ensemble des losanges.

Figure 16 : extrait du manuel « mathématiques, cours Maillard, classe de 1re C » de G. Girard et A. Lentin, édition de 1966, Hachette

exemple le cas dans « le nouveau calcul vivant » de Vassort, programme de la classe de fin d'études du 24 juillet 1947.

La période des mathématiques modernes change la façon d'approcher les objets géométriques et le symbolisme y est incontournable (Figures 15 et 16). La place centrale accordée aux objets mathématiques abstraits n'interdit toutefois pas les références aux objets physiques. Dès le primaire, il est question de travaux manuels permettant l'observation et menant à des activités de classification (Figure 17). Le premier exercice se replace immédiatement dans le monde physique, juste après la présentation de la figure dans l'espace géométrique. Plus récemment, le quadrilatère est présenté puis travaillé par le biais d'objets familiers, manipulables ou non (Figures 18 et 19).

Les professeurs en collège ne manqueront pas de consulter les documents de Pécaut [35], Duvert [20], Fromentin [23], Muniglia [32] ainsi que la brochure IREM [43] qui proposent de nombreuses idées sous la forme d'activités pour le professeur qui ont été expérimentées et analysées.



Le trapèze

Deux obliques qui coupent deux parallèles déterminent un quadrilatère dont deux côtés sont parallèles. Ce quadrilatère est un trapèze.
Les deux côtés parallèles sont les bases du trapèze.
La distance des deux bases est la hauteur du trapèze.

$\widehat{A} = \widehat{D} = 1$ droit

Lorsqu'un côté du trapèze est perpendiculaire aux deux bases, le trapèze est rectangle.

A D = B C

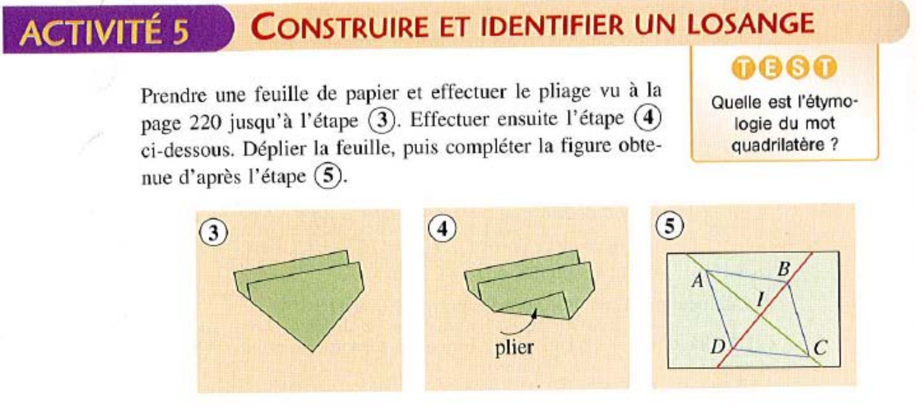
Un trapèze ayant ses côtés non parallèles égaux est un trapèze isocèle.

Exercices et problèmes

1 - Dans une bande de papier, en deux coups de ciseaux, découpez un trapèze.

2° qu'il en est de même pour EF et HG.
Comment appelle-t-on le quadrilatère EFGH ?

Figure 17 : extrait du manuel « Arithmétique-Cours Moyen »
de Adam et Gouzou, édition de 1969

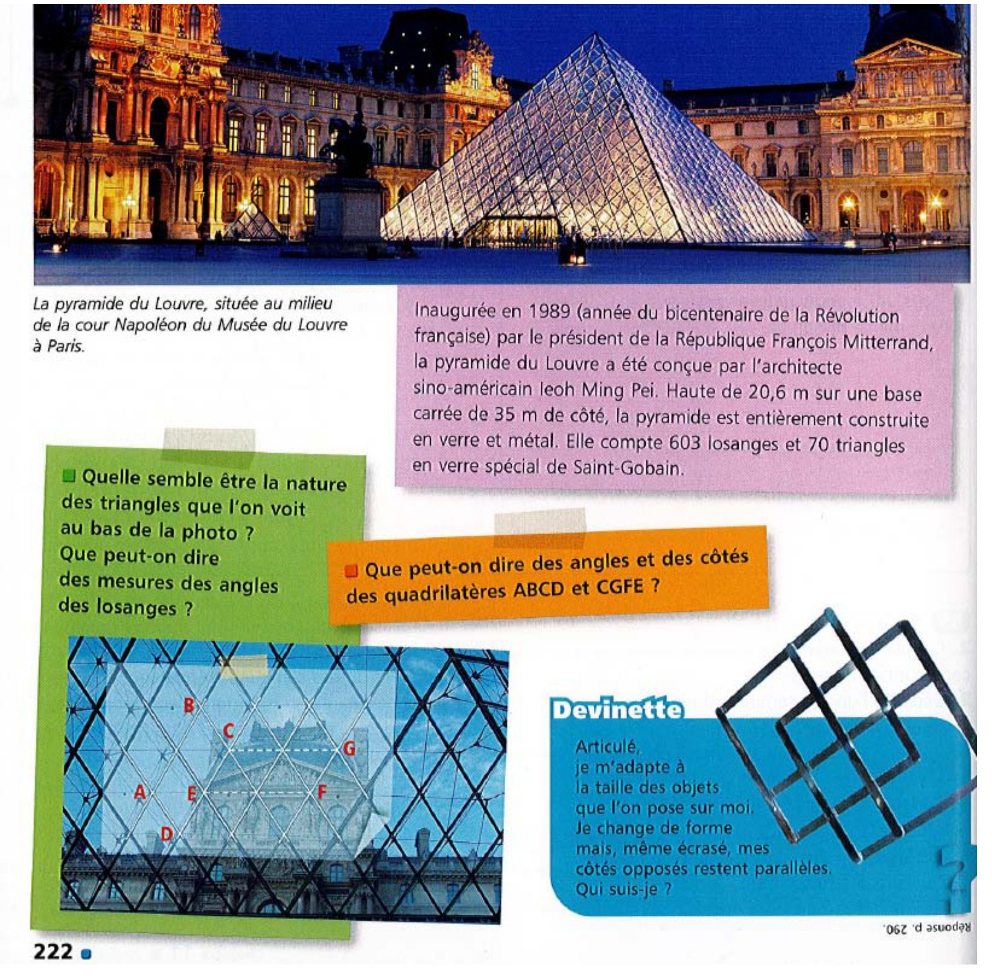


ACTIVITÉ 5 CONSTRUIRE ET IDENTIFIER UN LOSANGE

Prendre une feuille de papier et effectuer le pliage vu à la page 220 jusqu'à l'étape 3. Effectuer ensuite l'étape 4 ci-dessous. Déplier la feuille, puis compléter la figure obtenue d'après l'étape 5.

TEST
Quelle est l'étymologie du mot quadrilatère ?

Figure 18 : extrait du manuel « maths » pour la classe de sixième,
édition diabolo, hachette, édition de 2005



La pyramide du Louvre, située au milieu de la cour Napoléon du Musée du Louvre à Paris.

Inaugurée en 1989 (année du bicentenaire de la Révolution française) par le président de la République François Mitterrand, la pyramide du Louvre a été conçue par l'architecte sino-américain Ieoh Ming Pei. Haute de 20,6 m sur une base carrée de 35 m de côté, la pyramide est entièrement construite en verre et métal. Elle compte 603 losanges et 70 triangles en verre spécial de Saint-Gobain.

Quelle semble être la nature des triangles que l'on voit au bas de la photo ? Que peut-on dire des mesures des angles des losanges ?

Que peut-on dire des angles et des côtés des quadrilatères ABCD et CGFE ?

Devinette

Articulé,
je m'adapte à
la taille des objets
que l'on pose sur moi.
Je change de forme
mais, même écrasé, mes
côtés opposés restent parallèles.
Qui suis-je ?

Réponse p. 290.

222

Figure 19 : extrait de la page 222 du manuel Nouveau prisme (Belin)
pour la classe de cinquième, édition de 2010

La dualité angle-côté

De prime abord, la hiérarchie de la Figure 20 (page ci-contre) semble irréprochable. On peut toutefois lui objecter de ne pas respecter une propriété de symétrie que nous allons détailler.

Il est souhaitable que toute personne se destinant à l'enseignement de la géométrie,

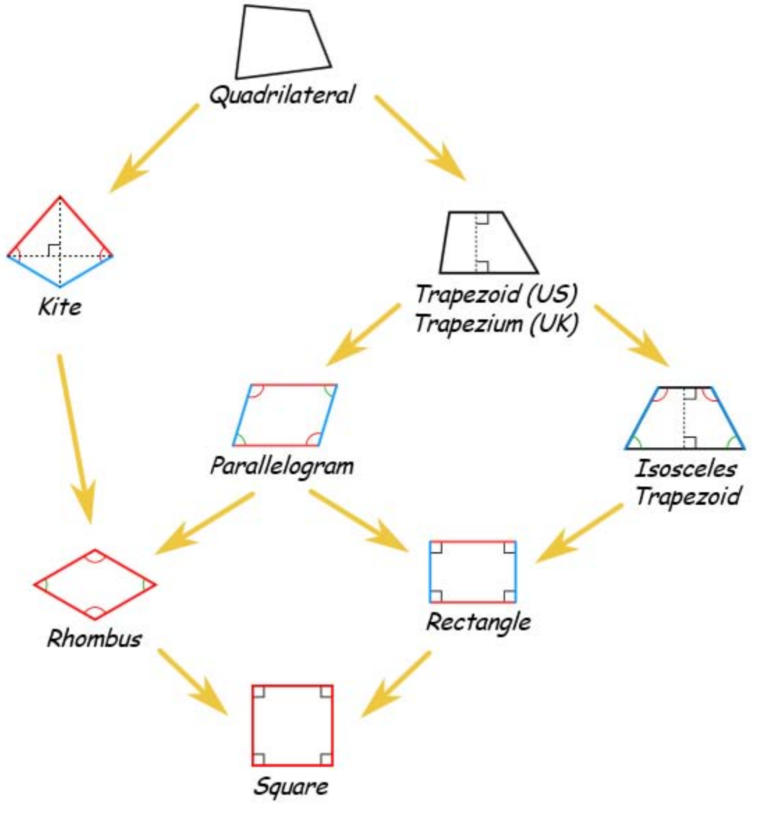
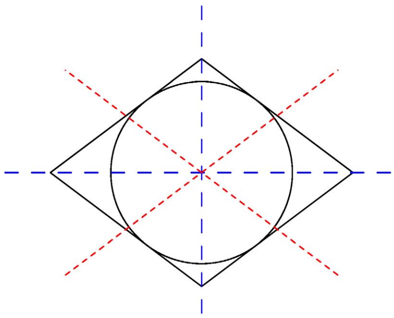
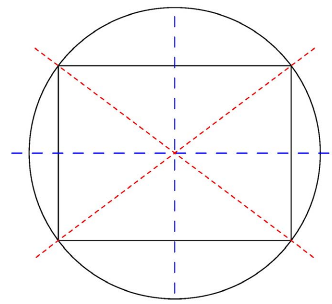


Figure 20 : Famille des quadrilatères, illustration provenant de la page internet https://www.mathsisfun.com/quadrilaterals.html

et ce même à un niveau élémentaire, ait entendu parler du programme d'Erlangen, et sache que la question de la classification des quadrilatères particuliers est fortement liée aux groupes de symétrie ou, de façon plus accessible, aux figures invariantes sous l'action de transformations élémentaires (voir par exemple [6] sur ce sujet). Le lecteur est aussi invité à lire a ce sujet Pintaudi ([39]), qui livre en outre une analyse comparée des choix concernant les systèmes français et allemand. En poussant l'étude des propriétés des quadrilatères un peu plus loin que ne le fait le collégien lambda, on voit apparaître une dualité entre les objets mathématiques que l'on peut qualifier de dualité côté-angle dans la mesure où elle intervertit ces deux notions (aussi appelée « réciprocité angle-côté des quadrangles » par Grünbaum dans [27] puis reprise dans [1]).

	
losange	rectangle
toutes les longueurs de côtés sont égales le centre est à même distance de tout côté les axes de symétrie sont des bissectrices deux affinités bissectent les côtés	tous les angles sont égaux le centre est à même distance de tout sommet les axes de symétrie sont des médiatrices deux affinités bissectent les angles

Cette dualité est en fait déjà présente dans l'étude du parallélogramme de Varignon, qui est un losange lorsque le quadrilatère est un rectangle, et un rectangle lorsque le quadrilatère est un losange. De Villiers détaille les propriétés concernées par cette dualité, dont voici un extrait plus complet quoique non exhaustif (nous considérons ici uniquement le cas des quadrilatères convexes ; De Villiers étudie séparément les cas des quadrilatères concaves et croisés) :

quadrilatère convexe	
circonscrit	inscrit
orthodiagonal	équidiagonal
”bissecté”	trapèze
cerf-volant	trapèze isocèle
parallélogramme	
losange	rectangle
cerf-volant avec trois angles de même mesure	trapèze avec trois côtés de même longueur
cerf-volant droit (inscrit)	trapèze isocèle circonscrit
carré	

A noter qu'il n'y a pas de lien d'implication ligne par ligne, une telle présentation ne pouvant être réalisée sans croisements dans le plan (voir Figures 21 et 22). Les figures sur une seule ligne sont leurs propres figures duales, il en existe d'autres : le pseudo-carré (ses diagonales sont orthogonales et égales) et le quadrilatère bicentrique (inscriptible et circonscriptible, qui est étudié dans [19]). On pourrait s'attendre à ce que la propriété de dualité soit un point important à atteindre lors de l'étude des quadrilatères dans l'enseignement secondaire, toutefois cette caractéristique n'a jamais été considérée dans les programmes officiels, et comme nous l'avons déjà vu, la langue française n'y est pas adaptée.

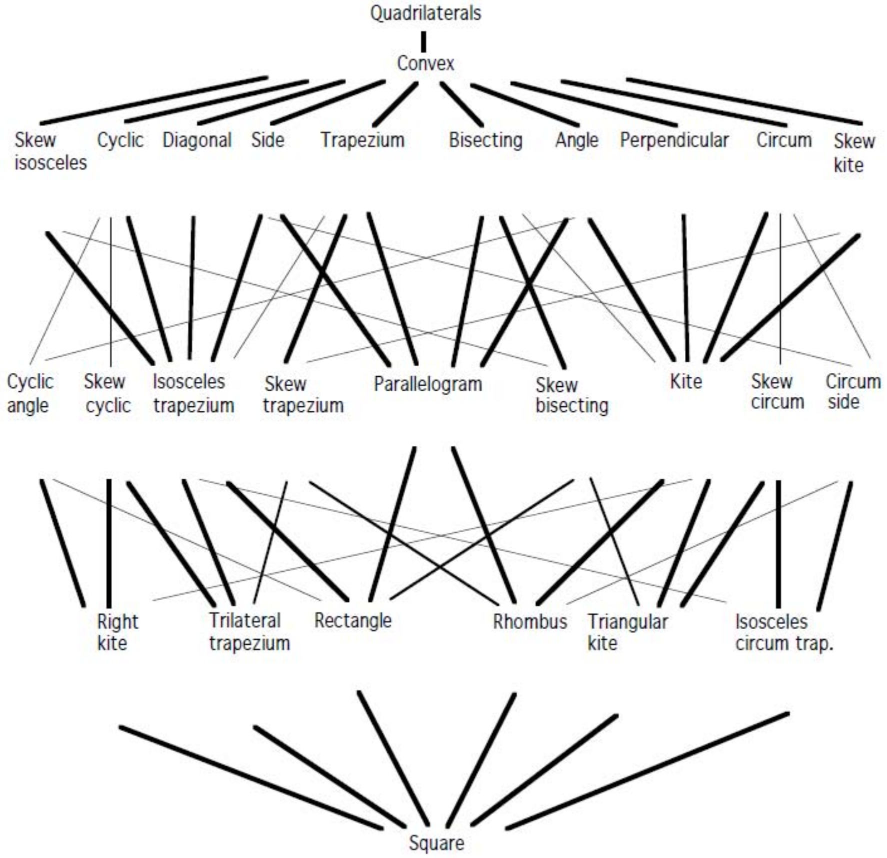


Figure 21: Classification de De Villiers, cas des quadrilatères convexes ([11])

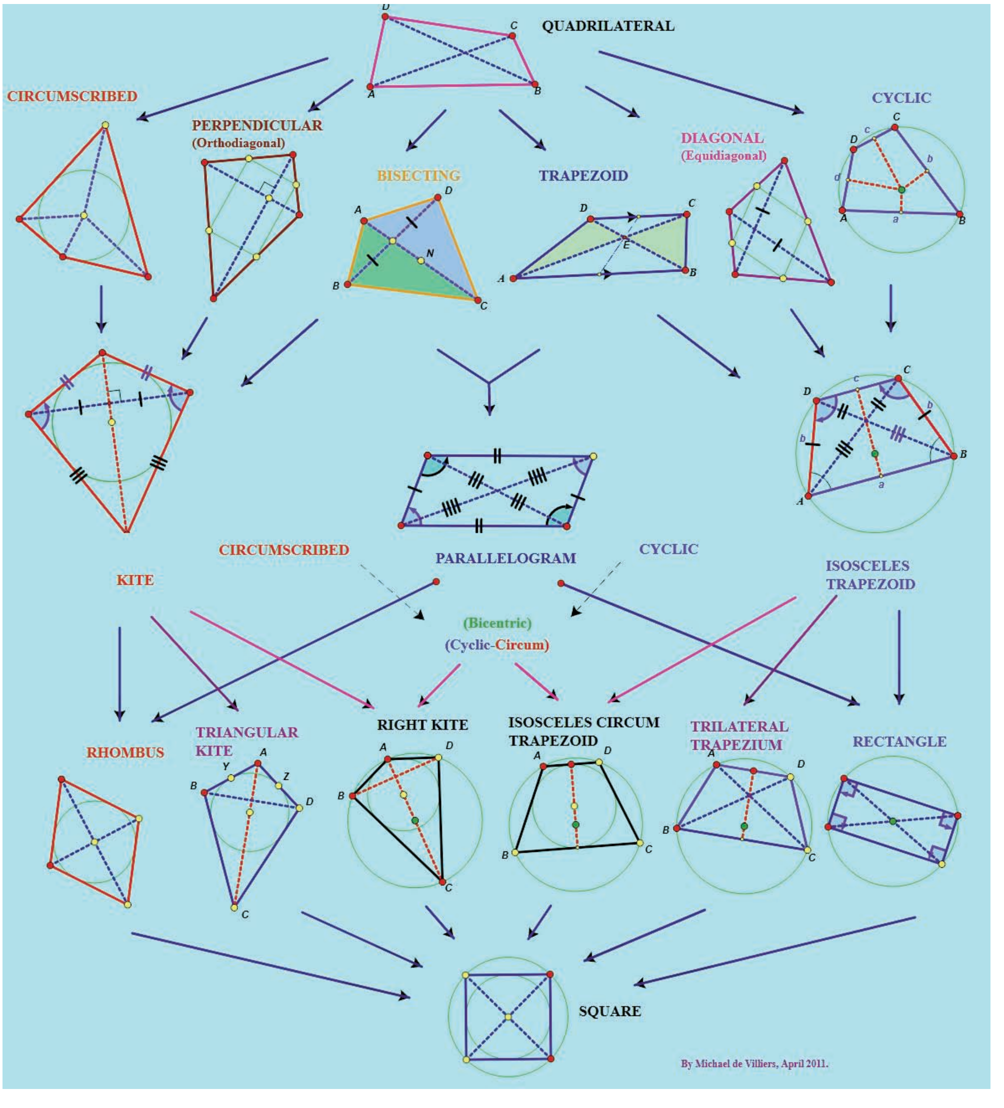


Figure 22: Classification de De Villiers,
version modifiée de l'illustration issue de la page internet
http://dynamicmathematicslearning.com/quad-tree-new-web.html

Il résulte du travail réalisé par De Villiers des représentations plaisantes pour le mathématicien, mais malheureusement surchargées (impossible de faire autrement !) que les élèves et les professeurs risquent fort de trouver illisibles et inutilisables. Bien entendu, on dépasse ici largement la géométrie de l'école primaire et du collège.

Les schémas respectant la dualité angle-côté peuvent être présentés de façon à ce que cette dualité se traduise graphiquement comme une symétrie (on pourrait ajouter sur les Figures 23 et 24 un axe vertical pour faire apparaître la dualité). On note toutefois que la présence de cette interprétation graphique peut avoir lieu même sans respecter la dualité : on pourrait ajouter à cette figure (Figure 23) la classe des trapèzes uniquement, ce qui briserait la dualité angle-côté, sans que cela n'impacte la symétrie apparente de la hiérarchie.

Le lecteur aura peut-être remarqué que le trapèze rectangle n'est pas mentionné dans la classification de De Villiers (fait-il partie des quadrilatères remarquables et, si oui, à quel niveau doit-il être introduit ?) ; nous laissons comme exercice le soin de lui trouver sa juste place, puis d'identifier les propriétés satisfaites par son dual.

Niveaux d'apprentissages des quadrilatères

S'il faut s'engager pour défendre une position particulière, une synthèse des réflexions proposées dans ce texte pourrait donner les niveaux suivants de classification des quadrilatères :

— un premier niveau comprenant les carrés, rectangles et losanges, lorsque l'élève n'a pas encore atteint un niveau déductif au sens du modèle de Van Hiele, dans lequel les classes peuvent être présentées sous forme de fiches en listant sans distinction définition(s) et propriétés, chaque fiche étant destinée à être complétée au fur et à mesure de l'acquisition de nouvelles connaissances (formules de calcul de périmètre et d'aire par exemple) ; on notera que le fait de placer où non le parallélogramme à ce niveau n'a pas d'influence sur le respect de la dualité angle-côté (l'ajout du parallélogramme pourrait correspondre à un niveau "1,5", ou 1 bis),

— un deuxième niveau fondé sur les notions de transformations élémentaires (symétries orthogonales et centrales), permettant de faire apparaître en plus des objets précédents le cerf-volant isocèle (un axe de symétrie passant par des sommets) et le trapèze isocèle (un axe de symétrie passant par les milieux de côtés oppposés) ; ce point de vue est par exemple défendu dans [15], qui place ce travail dans le cadre de la "géométrie du pliage",

— un troisième niveau complétant le deuxième avec les symétries affines : trapèze quelconque, cerf-volant « en biais » (Figure 24),

— un quatrième niveau dans lequel figurent toutes les propriétés additionnelles : inscriptible, tangentiel, orthodiagonal, équidiagonal et encore d'autres, qui permettrait de travailler avec les élèves (étudiants ?) des raisonnements complexes sur l'articulation des propriétés. On pourrait retrouver à ce niveau les éléments de la Figure 25, extraite de la page internet http://www.mathematische-basteleien.de/viereck.htm de Jürgen Köller, dans laquelle le lecteur pourra retrouver de nombreuses représentations fort intéressantes.

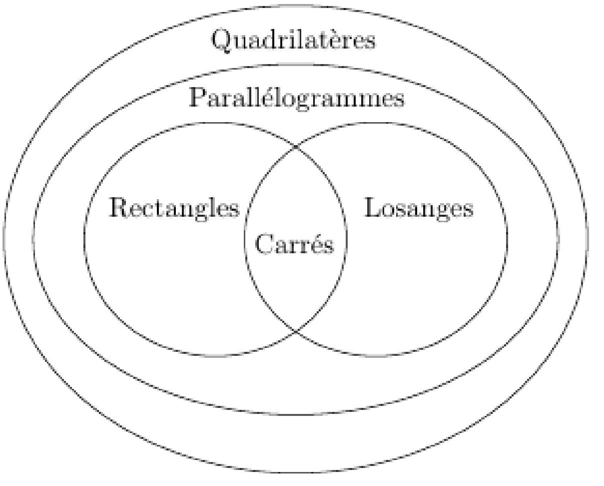


Figure 23 : Classification élémentaire correspondant au niveau 1,5

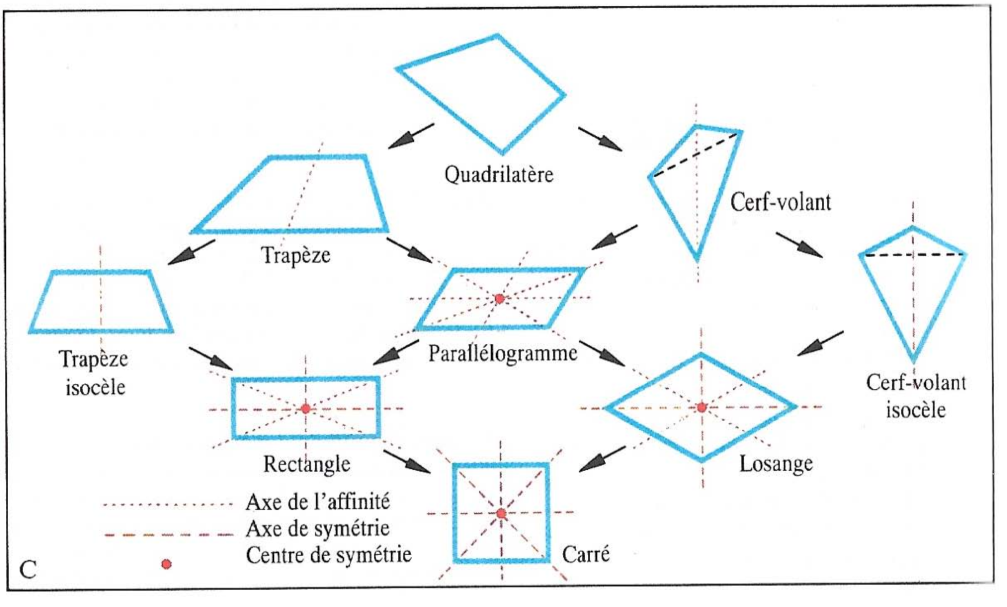


Figure 24 : Troisième niveau, illustration de l'atlas des mathématiques [42]

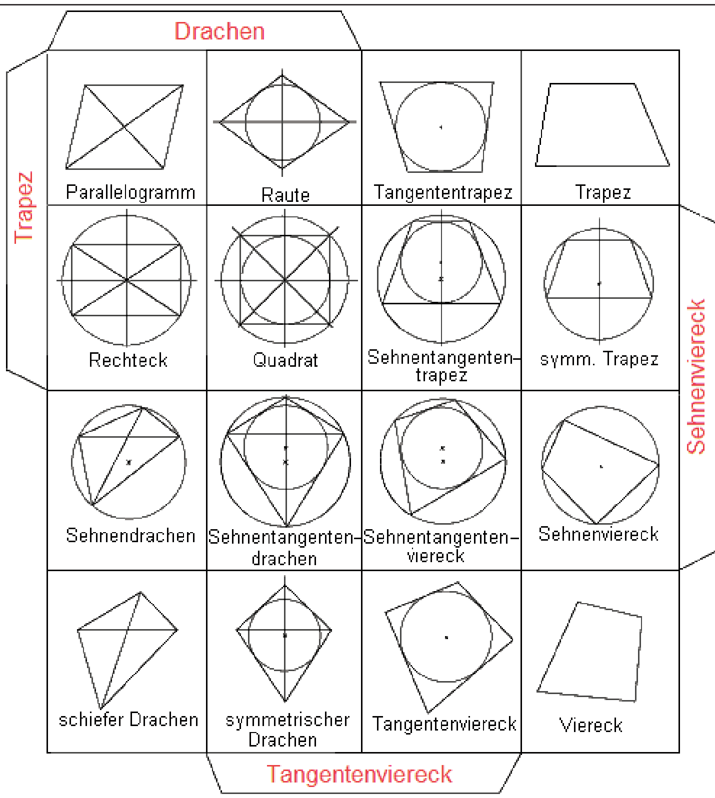


Figure 25 : Classification de quadrilatères au moyen d'une table de Karnaugh, version allemande

Chaque entrée dans un nouveau niveau correspond à une extension du niveau précédent, en construisant des classes plus générales d'objets qui satisfont moins de propriétés. On peut émettre l'hypothèse qu'il serait plus cohérent que tous les nouveaux objets d'un niveau apparaissent dans une même séquence d'enseignement pour les élèves et non de façon différée, même s'il est possible que ce choix ne soit pas compatible avec diverses contraintes pédagogiques et/ou institutionnelles.

Il semble important de faire ressortir l'idée que la liste des différents quadrilatères d'un niveau donné n'est pas arbitraire, mais correspond à une volonté d'exhaustivité selon les connaissances accessibles et compréhensibles à ce niveau. Nous avons mis ici l'accent sur les transformations, sans évoquer d'autres champs propres à la géométrie ou non (grandeurs et mesures, en particulier aire et périmètre), ce qui est par exemple l'approche développée dans [21]. D'autres personnes ont toutefois pu montrer que ce n'est pas la seule voie possible et qu'une structuration de la pensée géométrique est parfaitement envisageable à partir de la notion d'invariance de grandeurs, avec une étude centrée sur les notions d'isométries, de conservation des aires et de similitudes, et cela pourrait être davantage approprié pour l'enseignement au cours du cycle 4 ; le lecteur intéressé pourra consulter les travaux de Perrin [36] et Walter [50].

Approfondissements possibles

Tant bien même les éléments présentés ici permettraient de couvrir les attendus concernant l'étude de quadrilatères particuliers selon un programme d'enseignement, le travail est loin d'être terminé pour le mathématicien qui se dégage de ces obligations. On peut citer les travaux sur le sujet de Josefsson, dont [28], bien que depuis d'autres travaux aient été entrepris, ce dernier continuant son inspection méthodique de classes de quadrilatères.

Aussi, certains *jolis* résultats liés à des propriétés des quadrilatères usuels ne sont jamais cités dans les programmes, bien qu'ils soient accessibles dans le cadre de la géométrie élémentaire avec un minimum d'efforts (l'ingrédient essentiel de preuves de ces résultats pouvant être un cas d'égalité entre des triangles judicieusement construits, ou l'emploi d'une transformation élémentaire). On peut évoquer entre autres

— le théorème de Ptolémée : un quadrilatère convexe est inscriptible si et seulement si la somme des produits des longueurs des côtés opposés est égale au produit des longueurs des diagonales (le théorème pouvant désigner uniquement le sens direct ou bien l'équivalence),

— le théorème de Pitot (ou Pitot-Steiner) : un quadrilatère convexe est circonscriptible si et seulement si les deux sommes des longueurs des côtés opposés sont égales,

— un problème de Thébault : à partir d'un parallélogramme, on construit les quatre carrés qui s'appuient extérieurement sur chacun des côtés, alors le quadrilatère formé par les centres de ces carrés est un carré.

Quelques allusions ne peuvent masquer que les considérations présentées dans ce travail, et plus particulièrement cette dernière partie, sont déconnectées d'un programme d'enseignement spécifique, ainsi que de toute considération relative à l'évolution de la place de la géométrie et de ses contenus. La (très rapide) présentation de l'évolution de la question des quadrilatères dans le système français initiée ici pourrait encore être complétée, comparée aux systèmes étrangers, éclairée des motivations qui ont défini les orientations des programmes en géométrie ; nous laissons le soin aux lecteurs motivés de poursuivre ce travail.

Remerciements : l'auteur remercie les relecteurs pour leurs retours et suggestions.

References

[1] Orlando B. Alonso. *Grünbaum's convex quadrangles enumeration and an extension of the angleside reciprocity of quadrangles*. Geombinatorics, 20 (2010), pp. 45–47

[2] Orlando B. Alonso, Joseph Malkevitch. *Classifying triangles and quadrilaterals*. The Mathematics Teacher, Vol. 106 (7), march 2013, pp. 541–548

[3] Ramazan Avcu, Seher Avcu. *An analysis of definitions presented in school mathematics textbooks: the case of a rectangle*. ICES UEBK 2018, Antalya, pp. 447–456

[4] Annette Braconne-Michoux. *Evolution des conceptions et de l'argumentation en géometrie chez les élèves : paradigmes et niveaux de Van Hiele à l'articulation CM2-6ème*. Thèse de doctorat en didactique des mathématiques (2008).

[5] Annie Camenisch, Serge Petit. *La formation savante de mots en mathématiques*. Bulletin de l'APMEP (470) mai-juin 2007, pp. 311–332

[6] Michel Carral. *Géométrie du secondaire et programme d'Erlangen*. Bulletin de l'APMEP (431) novembre-décembre 2000, pp. 785–792

[7] Douglas H. Clements, Sudha Swaminathan, Mary Anne Zeitler Hannibal, Julie Sarama. *Young children's concepts of shape*. Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 30 (2), march 1999, pp. 192–212

[8] Timothy V. Craine, Rheta N. Rubenstein. *A quadrilateral hierarchy to facilitate learning in geometry*. The mathematics teacher, Vol. 86 (1) january 1993, pp. 30–36

[9] Michel Criton. *Taxinomie polygonale*. Tangente numéro 45, aout-septembre 1995, pp. 40–42

[10] Michael De Villiers. *The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals*. For the Learning of Mathematics Vol. 14 (1), Feb. 1994, pp. 11-18

[11] Michael De Villiers. *Some Adventures in Euclidean Geometry*. Dynamic Mathematics Learning, 219 p.

[12] Michael De Villiers. *To teach definitions in geometry or teach to define ?* Proceedings of the Twenty-second International Conference for the Psychology of Mathematics Education: Vol. 2 in A. Olivier & K. Newstead (Eds.). University of Stellenbosch, 12-17 July 1998, pp. 248–255

[13] Françoise Drouard. *Catégoriser et classer-classifier en biologie*. Grand N numéro 86, 2010, pp. 13–32

[14] François Drouin. *Cerfs-volants et axes de symétrie, pas de temps à perdre en classe de sixième ...* Bulletin de l'APMEP (478) septembre-octobre 2008, pp. 599–602

[15] Asuman Duapete-Paksu. *Paper folding: a tool in teaching quadrilaterals with the perspective of symmetry*. Studia Scientifica Facultatis Paedagogicae 2016, Verbaum, pp. 34–38

[16] Asuman Duapete-Paksu, Esra Iymen, Gül Sinem Pakmak. *How well elementary teachers identify parallelogram?* Educational Studies 38 (4), 2012, pp. 415–418

[17] Laurence Dupuch, Emmanuel Sander. *Apport pour les apprentissages de l'explicitation des relations d'inclusion de classes*. L'année psychologique, Vol. 107 (4), 2007, pp. 565–596

[18] Laurence Dupuch, Emmanuel Sander, Christelle Bosc-Miné. *Evaluer les connaissances à l'école élémentaire à partir d'un réseau d'inclusion de classes.* Psychologie Française, Vol. 60 (1), mars 2015, 17–34

[19] Jean-Baptiste Durrande. *Géométrie élémentaire. Démonstration des propriétés des quadrilatères à la fois inscriptibles et circonscriptibles au cercle*. Annales de Mathématiques pures et appliquées, tome 15 (1824-1825), pp. 133–145

[20] Rémi Duvert. *Les Quadrilatères au collège*. Brochure de l'I.R.E.M. de Picardie, Université de Picardie Jules Verne (1998), 136 p.

[21] Colleen Eddy, Kevin Hughes, Vincent Kieftenbeld, Carole Hataya. *Quadrilaterals: transformations for developing student thinking*. Illinois Mathematics Teacher, Vol. 61 (1), 2012, pp. 36–47

[22] Emile Fourrey. *Curiosités géométriques* (deuxième édition, 1907). Vuibert et Nony éditeurs

[23] Jean Fromentin. *Des fiches pour la classe : quadrilatères au collège*. Bulletin de l'APMEP (422) mai-juin 1999, pp. 295–307

[24] Taro Fujita, Keith Jones. *Learners' understanding of the definitions and hierarchical classification of quadrilaterals: towards a theoretical framing*. Research in Mathematics Education, 9 (1&2), 2007, pp. 3–20

[25] Nadine Gérald. *De la définition du trapèze*. Bulletin de l'APMEP (422) mai-juin 1999, pp. 292–294

[26] Nadine Gérald. *L'introduction du cerf-volant dans le programme de sixième en 2005, un pas vers celle de la "maison des quadrilatères" ?* Bulletin de l'APMEP (473) novembre-décembre 2007, pp. 907–911

[27] Branko Grünbaum. *The angle-side reciprocity of quadrangles.* Geombinatorics, 4 (1995), pp. 115–119

[28] Martin Josefsson. *On the classification of convex quadrilaterals*. The Mathematical Gazette Vol. 100, Issue 547, Mar. 2016, pp. 68–85

[29] Martin Josefsson. *Properties of bisect-diagonal quadrilaterals*. The Mathematical Gazette Vol. 101, Issue 551, Joly 2017, pp. 214–226

[30] Tolga Kabaca. *Understanding the hierarchical classification of quadrilaterals through the ordered relation according to diagonal properties.* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48:8, 2017, pp. 1240–1248

[31] Frank Monaghan. *What difference does it make? Children's views of the differences between some quadrilaterals.* Educational Studies in Mathematics, 42 (2), Jan. 2000, pp. 179–196

[32] Michèle Muniglia. *A propos de la démonstration en géométrie de cinquième.* Repères IREM (7) avril 1992, pp. 55–72

[33] Masakazu Okazaki, Taro Fujita. *Prototype phenomena and common cognitive paths in the understanding of the inclusion relations between quadrilaterals in Japan and Scotland.* Proceedings of the 31th Conference of the International Groupe for the Psychology of Mathematics Education in Woo J. H., Lew H. C., Park K. S. & Seo D. Y. (Eds.), Vol. 4, 2007, pp. 41–48

[34] Cécile Ouvrier-Buffet. *Construction of mathematical definitions: an epistemological and didactical study.* Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education in Marit Johnsen Hoines & Anne Berit Fuglestad (Eds.), Vol. 3, 2004, pp. 473–480

[35] Françoise Pécaut. *Quadrilatères articulés.* Bulletin de l'APMEP (416) spécial Journées Nationales, Marseille 1997, pp. 363–370

[36] Daniel Perrin. *Quels outils pour la géométrie à l'âge du collège ?* Repères IREM (53) octobre 2003, pp. 91–110

[37] Marie-Jeanne Perrin-Glorian. *Comment définir un trapèze isocèle.* Bulletin de l'APMEP (419) novembre-décembre 1998, pp. 709–711

[38] Jamar Pickreign. *Rectangles and rhombi: how well do preservice teachers know them?* Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, Vol. 1, February 2007, 7p.

[39] Giuseppe Pintaudi. *La "maison des quadrilatères" - une suggestion pour animer l'activité mathématique véritable.* L'ouvert (96) septembre 1999, pp. 14–33

[40] Guy Politzer. *L'informativité des énoncés : contraintes sur le jugement et le raisonnement.* Intellectica. Revue de l'Association pour la Recherche Cognitive (11), 1991/1. Pragmatique et Psychologie du Raisonnement, pp. 111–147

[41] A. Ramachandran. *The four-gon family tree.* At right angles. A resource for School Mathematics published by Azim Premji University Vol. 1 (1), June 2012, pp. 53–57

[42] Fritz Reinhardt, Heinrich Soeder. *Atlas des mathématiques.* traduction française, revue et augmentée, dirigée par J. Cuenat et J. Dablanc, *Encyclopédies d'Aujourd'hui*, La Pochotèque, Le Livre de Poche (1997).

[43] Danielle Salles-Legac, Ruben Rodriguez Herrera, Anne-Marie Bock. *Histoires de cerfs-volants et autres quadrilatères. Classer et reconnaître les quadrilatères à l'aide de systèmes articulés et de pliages*. Brochure de l'I.R.E.M. de Basse-Normandie, Université de Caen, France et I.R.E.M. de Ica, UNICA, Perú (2009).

[44] Tracie McLemore Salinas, Kathleen Lynch-Davis, Katherine J. Mawhinney, Deborah A. Crocker. *Exploring quadrilaterals to reveal teachers' use of definition: results and implications* Australian Senior Mathematics Journal Vol. 28 (2), 2014, pp. 50–59

[45] Stefan Turnau. *Sur la définition d'un trapèze isocèle*. Bulletin de l'APMEP (426) janvier-février 2000, p. 92

[46] Elif Türnüklü. *Construction of inclusion relations of quadrilaterals: analysis of pre-service elementary mathematics teachers's lesson plans*. Education and Science Vol. 39, No 173, 2014, pp. 198–208

[47] Fadime Ulusoy. *A meta-classification for students' selections of quadrilaterals: the case of trapezoid*. CERME 9 -Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb. 2015, Prague, Czech Republic. pp. 598–604

[48] Zalman Usiskin, Jennifer Griffin, David Witonsky, Edwin Willmore. *The classification of quadrilaterals: a study of definition*. Reserach in Mathematics Education, Information Age Publishing (2008), 124 p.

[49] Shlomo Vinner. *The naive concept of definition in mathematics*. Educational Studies in Mathematics, Vol. 7 (4), Dec. 1976, pp. 413–429

[50] Anne Walter. *Quelle géométrie pour l'enseignement en collège ?* Petit x (54) 2000, pp. 31–49

[51] Sasha Wang, Margaret Kinzel. *How do they know it is a parallelogram? Analyzing geometric discourse at van Hiele Level 3*. Research in Mathematics Education 16 (3), July 2014, pp. 288–305

[52] Katarina Žilková. *Convex quadrilaterals and their properties in the training of teachers for primary education*. Acta Didactica Universitatis Comenianae Mathematics, Issue 11, 2011, pp. 73–84