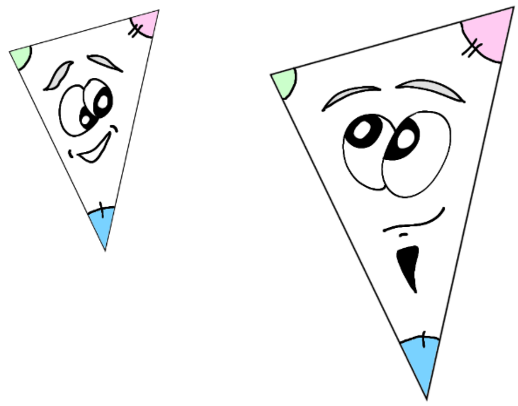
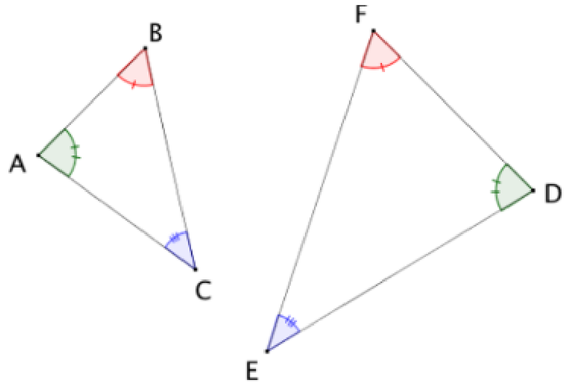
Triangles semblables



Définition : On dit que deux **triangles** sont **semblables** si leurs angles sont égaux deux à deux.

On dit aussi que ces triangles sont de même forme.



Exemple : les triangles ABC et DEF sont semblables car $\widehat{ABC} = \widehat{DFE}$; $\widehat{BAC} = \widehat{EDF}$; $\widehat{ACB} = \widehat{DEF}$

Vocabulaire : On dit que **les sommets** **B** et F sont **homologues.**
De même, on dit que les **côtés [BC] et [EF]** sont **homologues**.

Quel est le côté homologue à [ED] ?.............

Propriété 1 : Si deux **triangles** possèdent **deux angles égaux**, alors ils sont **semblables**.

Démonstration : Considérons deux triangles ABC et EDF qui possèdent deux angles égaux :

$$\widehat{BAC} = \widehat{DEF}$$
$$\widehat{ABC} = \widehat{EDF}$$

Montrons que ces triangles ont leurs trois angles de même mesure.
On sait que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.
Dans le triangle ABC, on a donc :

$$\widehat{BCA} = 180° - (\widehat{BAC} + \widehat{ABC})$$

Dans le triangle EDF, on a donc :

$$\widehat{EFD} = 180° - (\widehat{DEF} + \widehat{EDF})$$

Ces angles sont donc égaux.
Les deux triangles sont donc semblables.

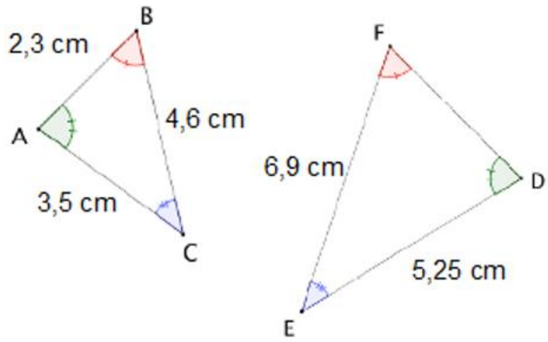
Remarque : Si deux **triangles** sont **égaux**, alors ils sont **semblables**.

Deux triangles égaux sont superposables, ils ont donc leurs angles de même mesure.
Revois les 3 propriétés sur les cas d'égalité de triangles :

Propriété : Si deux **triangles** sont **semblables**, alors les **longueurs de leurs côtés homologues sont deux à deux proportionnelles.**

Exemple 1 Les deux triangles ci-contre sont semblables. Les côtés [AB], [AC] et [BC] sont homologues respectivement aux côtés [FD], [ED] et [EF].

Quelle est la longueur du côté [FD] ?



Correction :

Les angles des triangles sont égaux deux à deux.

Donc les triangles ABC et DEF sont semblables.

Les longueurs des côtés homologues sont donc proportionnelles.

1ère rédaction possible

On peut écrire les rapports de longueurs égaux :

$$\frac{AB}{FD} = \frac{AC}{ED} = \frac{CB}{EF} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{\frac{2{,}3}{FD} = \frac{3{,}5}{5{,}25}} = \frac{4{,}6}{6{,}9}$$

En utilisant la méthode des produits en croix, on a FD = $\frac{2{,}3 \times 5{,}25}{3{,}5}$ = 3,45cm

Donc le côté [FD] mesure 3,45cm.

2ème rédaction possible

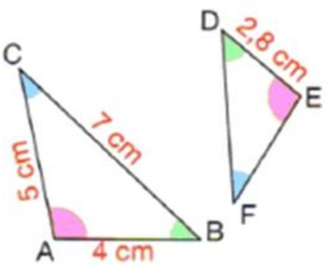
On peut construire le tableau de proportionnalité suivant :

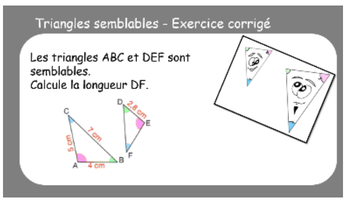
Longueurs du triangle ABC	AB = 2,3cm	AC = 3,5cm	BC = 4,6cm
Longueurs du triangle DEF	FD	ED = 5,25cm	EF = 6,9cm

En utilisant la méthode des produits en croix, on a FD = $\frac{2{,}3 \times 5{,}25}{3{,}5}$ = 3,45cm

Donc le côté [FD] mesure 3,45cm.

Exercice corrigé en vidéo : Les triangles ABC et DEF sont semblables. Trouve la longueur DF.

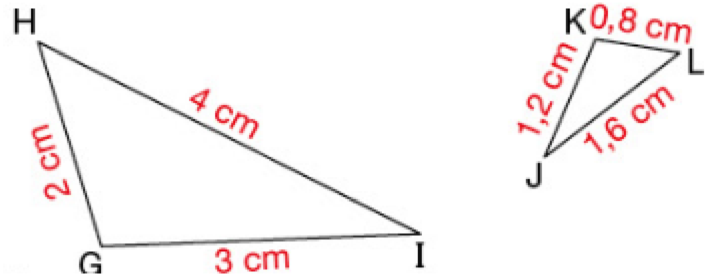




Propriété : Si deux triangles ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles alors ils sont semblables.

Exemple 1 :

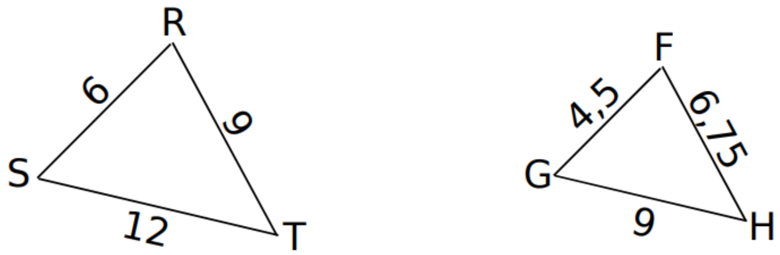
$$\frac{0,8}{2} = \frac{1,2}{3} = \frac{1,6}{4} = 0,4$$



Donc les triangles GHI et JKL sont semblables.
Donc $\widehat{IGH} = \widehat{JKL}$, $\widehat{GIH} = \widehat{KJL}$, et $\widehat{IHG} = \widehat{KLJ}$.
JKL est une **réduction** de GHI dans le rapport 0,4 ou bien GHI est un **agrandissement** de JKL dans le rapport

$$\frac{2}{0,8} = \frac{3}{1,2} = \frac{4}{1,6} = 2,5$$

Exemple 2 : Les triangles SRT et FGH sont-ils semblables ?



Si les triangles sont semblables, les côtés [SR], [RT] et [ST] sont homologues respectivement aux côtés [GF], [FH] et [GH].
On cherche à savoir s'il y a proportionnalité entre les longueurs des côtés des deux triangles.
On calcule donc les rapports de longueurs suivants :

$$\frac{SR}{FG} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots \qquad \frac{SR}{FG} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots \qquad \frac{SR}{FG} = \frac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots$$