Propriété, réciproque et propriété caractéristique

Rappels : initiation à la démonstration, contre-exemples et raisonnement par l'absurde.

Une proposition est une phrase qui peut être vraie ou fausse, mais jamais les deux à la fois.

Exemples dans la vie de tous les jours :

- « Si je mets de l'eau au congélateur, alors elle gèle. » : Vraie en conditions normales
- « Si je mange du pop-corn, alors je regarde un film. » : Fausse
  Contre-exemple : Tu peux manger du pop-corn sans regarder de film.
- « Si je suis dans l'eau, alors je nage. » Fausse. Contre-exemple : on peut aussi **juste flotter** sur une bouée !

⃠ **Attention : Une** question, **un** ordre **ou une** exclamation **ne sont** pas **des propositions**

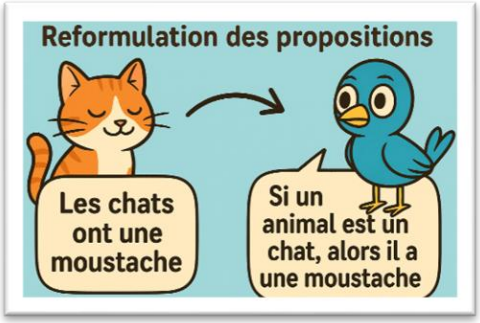
- *« Est-ce que tu viens ? »* n'est pas une proposition.
- *« Viens ici ! »* n'est pas une proposition

On ne sait pas si elles sont vraies ou fausses.

Exemples mathématiques :

- *« Un triangle a trois côtés. »* → Proposition (vraie)
- *« Si un nombre est pair, alors il est divisible par 3. »* → Proposition (fausse), contre-exemple 4.

La formulation « si… alors… » ?



Quand on écrit une phrase sous forme « si… alors… », on voit plus facilement :

- **Ce que l'on suppose au départ**, ce qui doit être vrai. (après le si)
- **Ce qu'on en déduit**, ce que la phrase affirme comme conséquence (après le alors).

En mathématiques, ça va nous aider dans les raisonnements déductifs. On va donc s'entraîner à reformuler les propositions.

Phrase de départ : « Les chats ont une moustache. »
Reformulation : « Si un animal est un chat, alors il a une moustache. »

Juliette Hernando http://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction (textes et images) ne peut être faite sans mon autorisation.

Phrase de départ : « Un triangle équilatéral a trois côtés égaux. »
Reformulation : « Si un triangle est équilatéral, alors il a trois côtés égaux. »

Exemples pour s'entraîner :

Propriété mathématique

Définition : Une **propriété mathématique** est **une proposition qui est vraie**.

C'est une particularité d'un objet mathématique.

Une propriété mathématique a donc été prouvée : on appelle cette preuve une **démonstration**. Dans le cours de mathématiques cette année, on ne démontre pas toutes les propriétés car certaines sont difficiles, mais ces démonstrations existent.

Dans une propriété, comme dans une proposition, on distingue **l'hypthèse** et la **conclusion**.

- **L'hypothèse** : c'est ce qu'on suppose au départ, ce qui doit être vrai.
- **La conclusion** : c'est ce qu'on en déduit, ce que la phrase affirme comme conséquence.

Essayons de comprendre sur des propositions de la vie quotidienne.
Exemples :

- Si je m'appelle Jean Dupont alors mes initiales sont JD. *Cet énoncé est vrai.*
  hypothèse *conclusion*
- Si j'ai moins de 18 ans alors je suis mineur. *Cet énoncé est vrai.*
  hypothèse *conclusion*
- Si je prends mon parapluie, alors il pleut.
  hypothèse conclusion

Cet énoncé est faux. Contre-exemple : Je peux prendre mon parapluie même s'il fait beau.

Exemple mathématique :

- Si un quadrilatère est un rectangle, alors ses diagonales sont de même longueur.
  hypothèse *conclusion*

Cet énoncé est vrai, c'est une propriété du rectangle : elle a été démontrée.

- Si un nombre entier divisible par 5 alors son chiffre des unités est 0.
  hypothèse *conclusion*

Cet énoncé est faux. Contre-exemple : 25 est divisible par 5.

Juliette Hernando http://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction (textes et images) ne peut être faite sans mon autorisation.

La réciproque

1) Voici une proposition : « Si un animal est un chien, alors il a quatre pattes. »

- Hypothèse (ce qu'on suppose) : « un animal est un chien »
- Conclusion (ce qu'on affirme en conséquence) : « il a quatre pattes »

Notons que cette proposition est vraie.

2) En voici une autre : « Si j'ai un sifflet, alors je suis arbitre. »

- Hypothèse (ce qu'on suppose) : « j'ai un sifflet »
- Conclusion (ce qu'on affirme en conséquence) : « je suis arbitre »

Cette proposition est fausse. Contre-exemple : je peux avoir acheté un sifflet et m'amuser avec sans être arbitre.

3) « Si je suis majeur(e), alors j'ai au moins 18 ans. »

- Hypothèse (ce qu'on suppose) : « je suis majeure »
- Conclusion (ce qu'on affirme en conséquence) : « j'ai au moins 18 ans »

Cette proposition est vraie.

La **réciproque** d'un énoncé s'obtient en **échangeant** la **l'hypothèse** et la **conclusion**.

Trouvons les réciproques des trois propositions précédentes » :

1) « Si un animal a quatre pattes alors c'est un chien. » : fausse. Contre-exemple : chat.
2) « Si je suis arbitre alors j'ai un sifflet » : vraie
3) « Si j'ai au moins 18 ans, alors je suis majeur » : vraie

Une proposition et sa réciproque ne sont pas toujours vraies ou fausses en même temps.
Il faut donc **étudier séparément** la proposition et sa réciproque pour savoir si chacune est vraie ou fausse.

Exemples :

Si je suis français **alors** je suis européen.
La proposition réciproque est
Si je suis européen **alors** je suis français.

Dans cet exemple, la première proposition est vraie, sa réciproque est fausse. Contre-exemple : je peux être allemand.

Juliette Hernando http://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction (textes et images) ne peut être faite sans mon autorisation.

Questions flash

Propriété caractéristique

Lorsqu'une **proposition et sa réciproque sont vraies** on dit que la proposition est une **propriété caractéristique**.

Exemple :

Si un homme est en vie alors il respire. (proposition vraie)

Si un homme respire alors il est en vie. (proposition réciproque vraie)

Il s'agit donc d'une propriété caractéristique : respirer *caractérise* le fait d'être en vie.

Exercice : les propositions suivantes sont-elles des propositions caractéristiques :

1. « Si je porte un casque, alors je fais du vélo. »
   Réponse : Pas caractéristique
   La proposition est fausse (on peut porter un casque sans faire du vélo).
   La réciproque est fausse aussi (on peut faire du vélo sans casque, même si ce n'est pas conseillé !).
2. « Un animal est un oiseau s'il a des plumes. »
   Réponse : Caractéristique
3. « Une personne est bilingue si elle parle couramment deux langues. »
   Réponse : Caractéristique
4. « Si un nombre a un chiffre des unités égal à 2, alors il est pair. »
   Réponse : Pas caractéristique
   La proposition est vraie.
   La réciproque est fausse, un nombre pair peut avoir 0, 4, 6 ou 8 aussi comme chiffre des unités.

Classe Genially

Juliette Hernando http://juliettehernando.com Hors du cadre de la classe, aucune reproduction (textes et images) ne peut être faite sans mon autorisation.