

Arithmétique (2)

Nombres premiers

Dans le précédent chapitre d'arithmétique, tu as appris à trouver la liste des diviseurs d'un nombre. En utilisant cette méthode, retrouve tous les diviseurs des nombres suivants :

- 12 :
- 15 :
- 19 :
- 25 :
- 27 :



Quelle est la particularité du nombre 19 ?.....



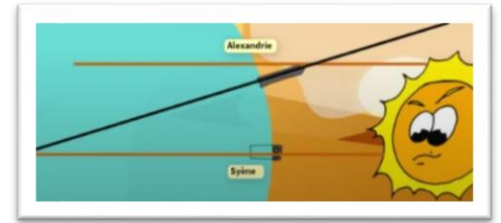
Définition : On dit qu'un nombre entier est **premier**, s'il possède **exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.**

Exercice : les nombres suivants sont-ils premiers ?

- 1 :
- 2 :
- 3 :
- 4 :
- 5 :
- 6 :
- 7 :
- 8 :
- 9 :
- 100 :

Remarque :

1 n'est pas un nombre premier car il n'a pas deux diviseurs distincts.

**Un peu d'histoire**

Le crible d'Eratosthène pour trouver les nombres premiers inférieurs à 30

Dans le tableau ci-dessous, entoure les nombres premiers et raye ceux qui ne le sont pas en utilisant la méthode du crible d'Eratosthène :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Les nombres premiers plus petits que 30 sont donc :

..... ♥

Propriété : Tout nombre entier (plus grand ou égal à 2) peut se décomposer de manière unique (à l'ordre des facteurs près) sous la forme d'un produit de nombres premiers.

Exemples :

- $15 = 3 \times 5$
- $6 =$
- $14 =$
- $12 =$

Remarques :

- $12 = 4 \times 3$ n'est pas une décomposition de 12 en produit de facteurs premiers car 4 n'est pas un nombre premier.
- $12 = 2 \times 2 \times 3$ est la décomposition de 12 en produit de facteurs premiers. On peut changer l'ordre des facteurs :

$$12 = 2 \times 3 \times 2 = 3 \times 2 \times 2$$

Juliette Hernando <https://juliettehernando.com>

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure.



Remarque : Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Cela signifie que ces décompositions de 70 en produit de facteurs premiers sont considérées comme identiques :

$$70 = 2 \times 5 \times 7 \quad ; \quad 70 = 5 \times 2 \times 7 \quad ; \quad 70 = 5 \times 7 \times 2 \quad ;$$

$$70 = 2 \times 7 \times 5 \quad ; \quad 70 = 7 \times 5 \times 2 \quad ; \quad 70 = 7 \times 2 \times 5$$



Détaillons sur un exemple, une méthode, que j'appelle « méthode de l'arbre », pour décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers.



<p>On cherche à décomposer en un produit de facteurs premiers le nombre 60.</p>	<p>Grâce aux critères de divisibilité, on sait que 10 est un diviseur de 60. $60 = 10 \times 6$. On dessine deux nouvelles branches, et sur les feuilles on écrit : 10 et 6.</p>	<p>10 n'est pas premier : $10 = 2 \times 5$. 6 n'est pas premier : $6 = 2 \times 3$. On dessine de nouvelles branches. Sur chacune des nouvelles feuilles on trouve : 2, 3 et 5. Ce sont des nombres premiers. La décomposition est terminée.</p>

On vient de trouver comme décomposition de 60 en produit de facteurs premiers :

$$60 = 2 \times 5 \times 2 \times 3$$

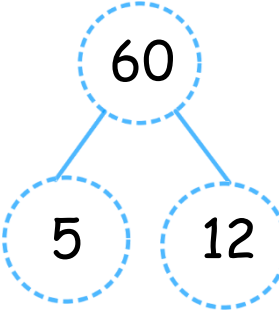
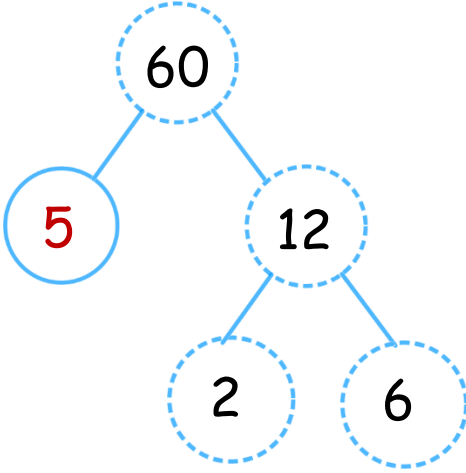
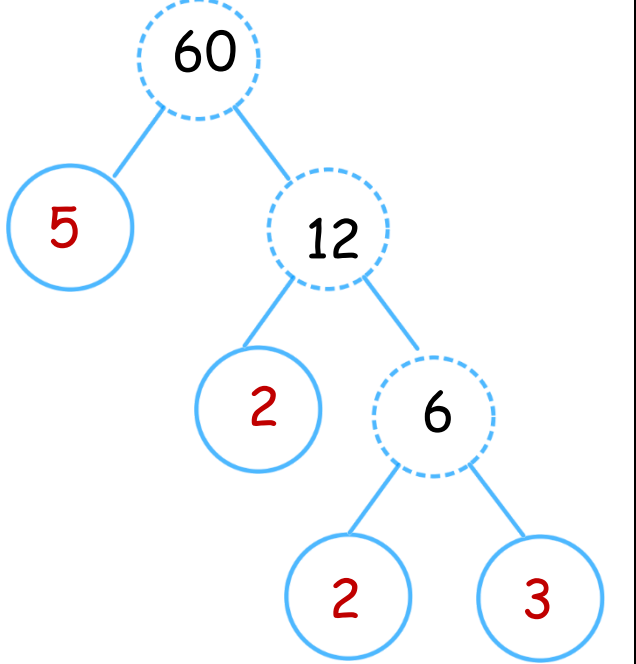
On a pour habitude d'écrire les facteurs dans l'ordre croissant :

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Juliette Hernando <https://juliettehernando.com>

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure.

Cette décomposition est unique, et pourtant au départ, on a choisi le diviser en premier 60 par 10. Vérifions que le résultat final reste le même si on commence en divisant 60 par 5 :

		
<p>Grâce aux critères de divisibilité, on sait que 5 est un diviseur de 60. $60 = 5 \times 12$.</p>	<p>5 est premier, cette branche est terminée. 12 n'est pas premier : $12 = 2 \times 6$.</p>	<p>2 est premier, cette branche est terminée. 6 n'est pas premier : $6 = 2 \times 3$. 2 et 3 sont des nombres premiers, donc ces branches sont terminées.</p>

Donc on retrouve : $60 = 5 \times 2 \times 2 \times 3$

Peu importe l'ordre dans lequel on écrit les diviseurs, on retrouve grâce à cette méthode la décomposition en produit de facteurs premiers d'un nombre.

Application : décompose en produit de facteurs premiers : 18 ; 55 ; 68 ; 100.

Remarque : Les nombres premiers ont un arbre de décomposition avec une unique feuille :



Questions flash :

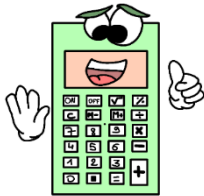


- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)
- 6)
- 7)
- 8)
- 9)
- 10)

https://www.youtube.com/watch?v=7P1x_A9EOQI&ab_channel=MathsetJeux



Exercice : Sur ton cahier d'exercices, écris la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants : 24 ; 75 ; 124 ; 429 ; 199 ; 780.



Vérifie à l'aide de la calculatrice :

https://www.youtube.com/watch?v=ahbcHc5yO64&ab_channel=MathsetJeux

Simplifier une fraction



Méthode 1 : On cherche un (ou plusieurs) diviseur commun :

- $\frac{12}{15} = \frac{\cancel{3} \times 4}{\cancel{3} \times 5} = \frac{4}{5}$
- $\frac{42}{70} = \frac{6 \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times 10} = \frac{6}{10}$
- $\frac{42}{70} = \frac{\cancel{2} \times 21}{\cancel{2} \times 35} = \frac{21}{35} = \frac{3 \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times 5} = \frac{3}{5}$

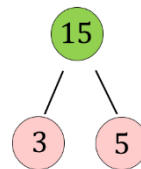
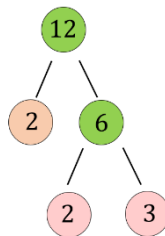


Juliette Hernando <https://juliettehernando.com>

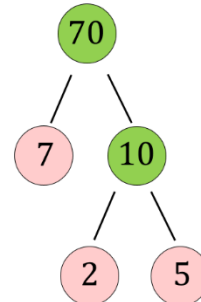
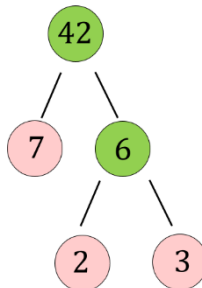
Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure.

Méthode 2 : On décompose les deux nombres en produit de facteurs premiers :

- $\frac{12}{15} = \frac{\cancel{3} \times 2 \times 2}{\cancel{3} \times 5} = \frac{4}{5}$



- $\frac{42}{70} = \frac{\cancel{2} \times 3 \times \cancel{7}}{\cancel{7} \times \cancel{2} \times 5} = \frac{3}{5}$



- $\frac{66}{30} =$

- $\frac{12}{51} =$

- $\frac{126}{100} =$



Classe Genially :

Juliette Hernando <https://juliettehernando.com>

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure.