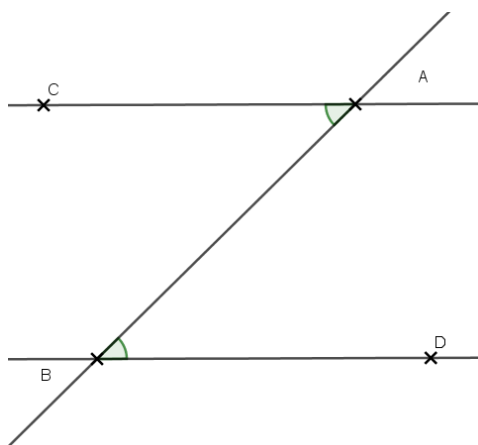




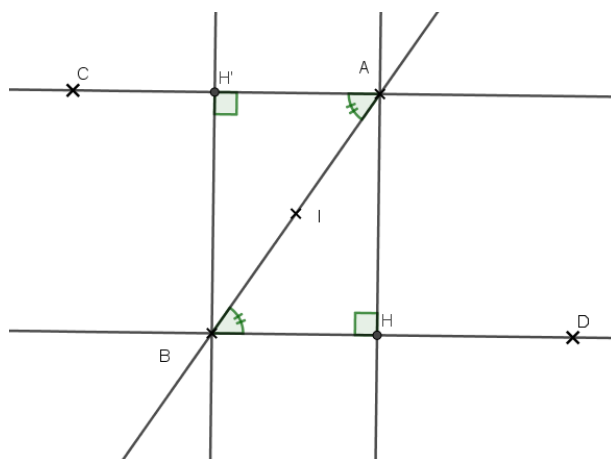
Démonstration de la caractérisation des angles alternes-internes

On va d'abord démontrer que si deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes de même mesure, alors ces droites sont parallèles.

Démonstration : On considère deux droites (CA) et (BD) coupées par une sécante. On suppose que les angles alternes-internes $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DBA}$ sont de même mesure. On veut montrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.



L'idée de cette démonstration est de tracer la perpendiculaire à (BD) passant par A. On appelle H leur point d'intersection. On trace ensuite la perpendiculaire à (AC) passant par B, on appelle H' leur point d'intersection.



Si on prouve que (H'B) et (BD) sont perpendiculaires, on pourra en déduire le parallélisme de (AC) et (BD).

Les deux triangles ABH et ABH' ont deux angles de même mesure car :

- on a supposé les angles alternes-internes de même mesure
- ce sont des triangles rectangles : ils ont donc tous les deux un angle de 90°

Le troisième angle de ces triangles est donc le même mesure d'après la propriété sur la somme des angles d'un triangle.

Juliette Hernando <https://juliettehernando.com>

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction des textes et des images, même partielle, ne peut être faite sans l'autorisation expresse de l'auteure. Merci à Alexis Fakhreddine !

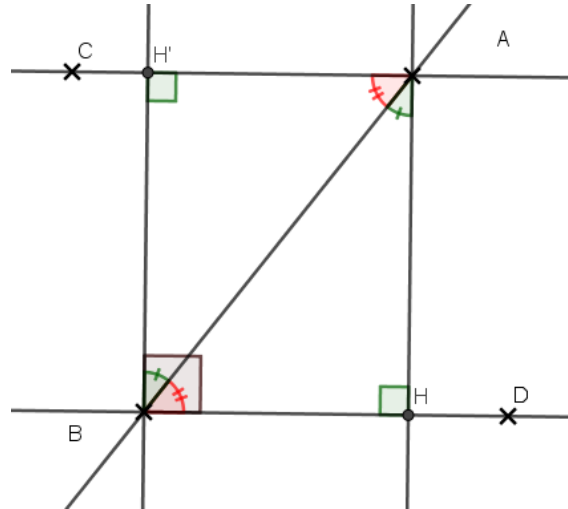
$$\widehat{H'BA} = \widehat{BAH}$$

Par conséquent

$$\widehat{H'BD} = \widehat{H'BA} + \widehat{ABH} = \widehat{H'AB} + \widehat{BAH}$$

Or le triangle ABH est rectangle donc la somme de ses deux angles aigus est égale à 90° : $\widehat{H'AB} + \widehat{BAH} = 90^\circ$

Donc $\widehat{H'BD} = 90^\circ$



La droite (H'B) est donc perpendiculaire aux deux droites (AC) et (BD).

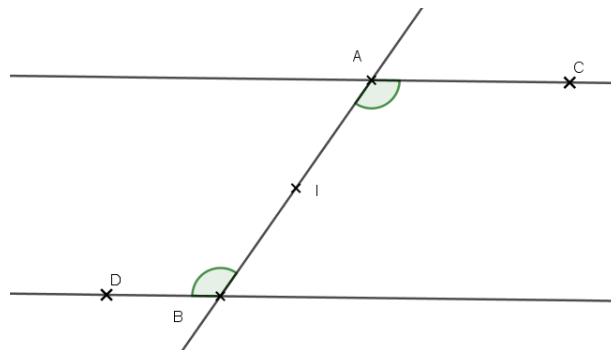
Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles entre elles.

Donc (AC) parallèle à (BD).

Montrons maintenant la réciproque, c'est-à-dire que :

Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors elles forment des angles alternes-internes de même mesure.

Démonstration :

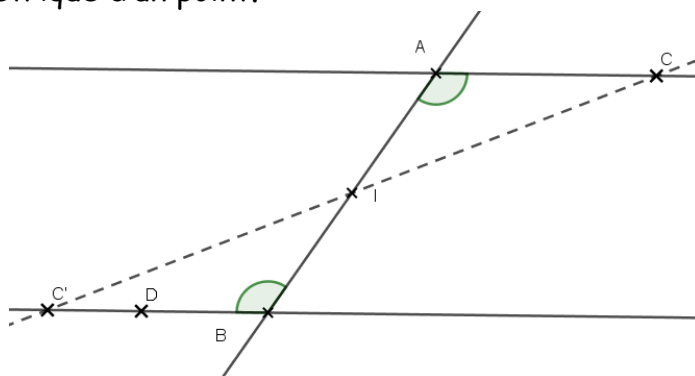


(AC) et (BD) sont deux droites parallèles. On veut prouver que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DBA}$ alternes-internes sont de même mesure.

Soit I le milieu de $[AB]$. Par définition du symétrique d'un point, A et B sont symétriques par rapport à I .

Montrons que le symétrique de C est sur la droite (BD) .

Appelons C' le symétrique de C par rapport à I . C' appartient à la demi-droite $[CI)$ par définition du symétrique d'un point.



Comme l'image d'une droite par une symétrie centrale est une droite parallèle, C' appartient à la parallèle à (AC) passant par B . Puisqu'on a supposé les droites parallèles, C' appartient à (BD) .

Donc le symétrique de l'angle $\widehat{CAB}$ est l'angle $\widehat{ABC'}$, ils ont donc la même mesure car la symétrie centrale conserve les mesures d'angles.

Comme les points B , D et C' sont alignés, $\widehat{ABC'}$ et $\widehat{DBA}$ ont donc la même mesure. On a donc prouvé que les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{DBA}$ alternes-internes sont de même mesure.