

# Arithmétique (1) diviseurs et multiples

Dans ce chapitre, nous allons travailler avec des nombres qui sont des entiers naturels.

**Définition :** Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels non nul, on dit que  **$a$  divise  $b$**  s'il existe un entier  $c$  tel que :  $a = b \times c$ .

Exemples :

$$12 \text{ divise } 24 \text{ car } 24 = 2 \times 12.$$

$$5 \text{ divise } 35 \text{ car } 35 = 7 \times 5.$$

**Vocabulaire :** On dit alors que :

- **$b$  divise  $a$**
- **$b$  est un diviseur** de  $a$
- **$a$  est un multiple** de  $b$
- **$a$  est divisible** par  $b$



Exercice 1 : Donne une écriture de 100 qui montre que :

- |                               |                              |
|-------------------------------|------------------------------|
| 1) 100 est un nombre pair.    | 3) 4 est un diviseur de 100. |
| 2) 100 est un multiple de 20. | 4) 5 divise 100.             |

Exercice 2 : Donne une écriture de 28 qui montre que 7 est un diviseur de 28

Exercice 3 : Ecris la liste des diviseurs de 15

Exercice 4 : Ecris la liste des multiples de 3 inférieurs à 20 :

Exercice 5 : Ecris la liste des multiples de 7 inférieurs à 80

Exercice 6 : Quel est l'ensemble des multiples de 0 ?

Exercice 7 : La somme de deux multiples de 3 est-elle un multiple de 3 ?

**Critères de divisibilité :** Un nombre entier est divisible :

- par 2, si son chiffre des unités est égal à 0, 2, 4, 6 ou 8.
- par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.
- par 5, si son chiffre des unités est 0 ou 5.
- par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.
- par 10, si son chiffre des unités est 0.

Entraîne-toi ! Page 2/6

[https://www.youtube.com/watch?v=-lNixgm-C90&ab\\_channel=MathsetJeux](https://www.youtube.com/watch?v=-lNixgm-C90&ab_channel=MathsetJeux)



### Questions flash :



- |          |           |
|----------|-----------|
| 1) ..... | 6) .....  |
| 2) ..... | 7) .....  |
| 3) ..... | 8) .....  |
| 4) ..... | 9) .....  |
| 5) ..... | 10) ..... |

[https://www.youtube.com/watch?v=muRfQ9rxWC8&ab\\_channel=MathsetJeux](https://www.youtube.com/watch?v=muRfQ9rxWC8&ab_channel=MathsetJeux)

**Application :** Utilise les critères de divisibilité pour répondre aux questions suivantes

| Questions                       | Réponses détaillées |
|---------------------------------|---------------------|
| 5 241 est-il divisible par 2 ?  |                     |
| 111 est-il divisible par 3 ?    |                     |
| 15 214 est-il divisible par 5 ? |                     |
| 2 109 est-il divisible par 9 ?  |                     |

## Liste des diviseurs d'un nombre

Une première méthode sur un exemple : cherchons tous les diviseurs de 54



[https://www.youtube.com/watch?v=slgShtoBx4k&ab\\_channel=MathsetJeux](https://www.youtube.com/watch?v=slgShtoBx4k&ab_channel=MathsetJeux)

Juliette Hernando <https://juliettehernando.com> Hors du cadre de la classe, aucune reproduction (textes ou images) ne peut être faite sans mon autorisation. D'après le document d'accompagnement sur l'arithmétique au collège (<https://eduscol.education.fr/document/17257/download>) et la brochure de l'IREM de Grenoble « Arithmétique au collège ».

Pour faire la liste des diviseurs d'un nombre, sans en oublier, on pourrait donc se dire qu'il faut tester tous les entiers compris entre 1 et ce nombre.

Ce qui peut faire...beaucoup ! Surtout si ce nombre est grand.

Supposons que ce nombre soit 124, ça voudrait dire effectuer 124 tests !!!

Heureusement, il y a une propriété qui va nous permettre d'aller beaucoup plus vite :

**Propriété (admise):** Si  $n$  désigne un entier qui n'est pas premier, alors  $n$  a un diviseur plus petit que  $\sqrt{n}$ .

Grâce à cette propriété, il suffit de tester tous les entiers compris entre 1 et  $\sqrt{124}$ .

En effet, si  $d$  est un diviseur de 124 alors  $(124 : d)$  est aussi un diviseur de 124. On peut donc retrouver tous les diviseurs plus grands que  $\sqrt{124}$  à partir des diviseurs inférieurs à  $\sqrt{124}$ .

Sur notre exemple :

4 est un diviseur de 124 et si je divise 124 par 4, je trouve 21. Donc 4 et 21 sont des diviseurs de 124. J'ai trouvé une paire de diviseurs : (4 ; 21).

Pour avoir la liste complète, on commence par calculer la valeur approchée par défaut à l'unité de  $\sqrt{124}$  :

$$\sqrt{124} \approx 11$$

On va donc tester tous les entiers compris entre 1 et 11 :

- S'ils sont diviseurs de 124, on les note et on note le diviseur associé
- Sinon, on passe à l'entier suivant

11 tests c'est beaucoup moins que 124 !

Et pour effectuer chacun de ces tests, plusieurs méthodes possibles (tables, critères de divisibilité, effectuer la division euclidienne et comparer le reste à zéro).

| Entier $d$ à tester | $d$ est-il diviseur de 124 ?   | Si oui, $(124 : d)$ est aussi un diviseur de 124 |
|---------------------|--|--|
| 1                   | Oui, 1 divise tous les nombres ! $124 = 1 \times 124$                          | 124  |
| 2                   | Oui, 124 est pair. $124 = 2 \times 62$   | 62   |
| <del>3</del>        | Non, car $1+2+4 = 7$ et 7 n'est pas un multiple de 3.                          | x  |
| 4                   | Oui, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 4. $124 = 4 \times 31$ | 31   |
| <del>5</del>        | Non, car le chiffre des unités de 124 est 4.                                   | x  |
| <del>6</del>        | Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 6.                     | x  |
| <del>7</del>        | Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 7.                     | x  |
| <del>8</del>        | Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 8.                     | x  |
| <del>9</del>        | Non, car 124 n'est pas divisible par 3.  | x  |
| <del>10</del>       | Non, car le chiffre des unités de 124 est 4.                                   | x  |
| <del>11</del>       | Non, car $4+1 = 5$ et le chiffre des dizaines est 2.                           | x  |

Finalement, la liste des diviseurs de 124 est : 1 - 2 - 4 - 31 - 62 - 124

Juliette Hernando <https://juliettehernando.com> Hors du cadre de la classe, aucune reproduction (textes ou images) ne peut être faite sans mon autorisation. D'après le document d'accompagnement sur l'arithmétique au collège (<https://eduscol.education.fr/document/17257/download>) et la brochure de l'IREM de Grenoble « Arithmétique au collège ».



**Remarque 1** Tu n'as pas à remplir la colonne du milieu : c'est pour comprendre la méthode, très vite, ton tableau n'aura que deux colonnes.

**Remarque 2** Pour écrire la liste des diviseurs dans l'ordre croissant, il te suffit de noter chacun des entiers que tu n'as pas rayés dans le tableau :

| Entier d à tester | d est-il diviseur de 124 ?   | Si oui, (124 : d) est aussi un diviseur de 124 |
|-------------------|--|--|
| 1                 | Oui, 1 divise tous les nombres ! $124 = 1 \times 124$                          | 124  |
| 2                 | Oui, 124 est pair. $124 = 2 \times 62$   | 62   |
| 3                 | Non, car $1+2+4=7$ et 7 n'est pas un multiple de 3.                            | x  |
| 4                 | Oui, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 4. $124 = 4 \times 31$ | 31   |
| 5                 | Non, car le chiffre des unités de 124 est 4.                                   | x  |
| 6                 | Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 6.                     | x  |
| 7                 | Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 7.                     | x  |
| 8                 | Non, je le vérifie en effectuant la division de 124 par 8.                     | x  |
| 9                 | Non, car 124 n'est pas divisible par 3.  | x  |
| 10                | Non, car le chiffre des unités de 124 est 4.                                   | x  |
| 11                | Non, car $4+1=5$ et le chiffre des dizaines est 2.                             | x  |



Cette méthode ne permet pas de connaître à l'avance le nombre de diviseurs que tu vas trouver. Nous verrons plus tard comment connaître ce nombre, ce qui nous permettra d'être encore plus efficaces.

[https://www.youtube.com/watch?v=XZHcr3Hr0i4&ab\\_channel=MathsetJeux](https://www.youtube.com/watch?v=XZHcr3Hr0i4&ab_channel=MathsetJeux)

**Résumons la méthode :**

Pour trouver la liste des diviseurs d'un entier n :

- 1) On teste tous les entiers d inférieurs à  $\sqrt{n}$  :
  - Si d est un diviseur de n : on ajoute à notre liste d et (n : d)
  - Sinon on passe à l'entier suivant
- 2) On écrit cette liste en les rangeant dans l'ordre croissant.



**Exercice 8 :** écris la liste de tous les diviseurs de 12.

$\sqrt{12} \approx \dots\dots$

| Entier d à tester | 12 : d<br>Si d divise 12 |
|-------------------|--------------------------|
| 1                 |                          |
| 2                 |                          |
| 3                 |                          |

**Exercice 9 :** écris la liste de tous les diviseurs de 15.

$\sqrt{15} \approx \dots\dots$

| Entier d à tester | 15 : d<br>si d divise 15 |
|-------------------|--------------------------|
| 1                 |                          |
| 2                 |                          |
| 3                 |                          |

**Exercice 10 :** écris la liste de tous les diviseurs de 28.

$\sqrt{28} \approx \dots\dots$

| Entier d à tester | 28 : d<br>Si d divise 28 |
|-------------------|--------------------------|
| 1                 |                          |
| 2                 |                          |
| 3                 |                          |
| 4                 |                          |
| 5                 |                          |

Exercice 11 :

- 1) Trouve tous les diviseurs de 48.
- 2) Trouve tous les diviseurs de 100.
- 3) Trouve tous les diviseurs communs à 48 et à 100.

**Problème :** Un garçon de café doit répartir 36 croissants et 24 pains au chocolat dans des corbeilles. Chaque corbeille doit avoir le même contenu.

Quelles sont les répartitions possibles ?

Solution : [https://www.youtube.com/watch?v=nX5i23U20fs&ab\\_channel=MathsetJeux](https://www.youtube.com/watch?v=nX5i23U20fs&ab_channel=MathsetJeux)



## Plus petit multiple commun

Exercice résolu : Deux ampoules clignotent. L'une s'allume toutes les 153 secondes et l'autre toutes les 187 secondes. A minuit, elles s'allument ensemble. Déterminer l'heure à laquelle elles s'allumeront de nouveau ensemble pour la première fois.



Correction : La première ampoule s'allume tous les multiples de 153s.

La deuxième ampoule s'allume tous les multiples de 187s.

On recherche donc le plus petit multiple commun à 153 et 187.

Pour cela, nous allons construire simultanément le tableau des multiples de 153 et 187 : on s'arrête dès que l'on trouve un multiple commun.

|                  | × 1 | × 2 | × 3 | × 4 | × 5 | × 6  | × 7  | × 8  | × 9  | × 10  | × 11 |
|------------------|-----|-----|-----|-----|-----|------|------|------|------|-------|------|
| Multiples de 153 | 153 | 306 | 459 | 612 | 765 | 918  | 1071 | 1224 | 1377 | 1530  | 1683 |
| Multiples de 187 | 187 | 374 | 561 | 748 | 935 | 1122 | 1309 | 1496 | 1683 | 1 870 |      |

1 683 est le plus petit multiple commun.

$$1683 = 60 \times 28 + 3$$

$$1\ 683s = 28 \text{ min } 3s$$

Les deux ampoules clignotent ensemble pour la première fois au bout de 28 min 3s.

La première ampoule se sera allumée 11 fois et la deuxième 9 fois : on le lit dans le tableau.

Exercice 12 : Trouve le plus petit multiple commun à 12 et 18.

Genially : <https://view.genial.ly/61f10a8a2980420013b3e322>



Juliette Hernando <https://juliettehernando.com> Hors du cadre de la classe, aucune reproduction (textes ou images) ne peut être faite sans mon autorisation. D'après le document d'accompagnement sur l'arithmétique au collège (<https://eduscol.education.fr/document/17257/download>) et la brochure de l'IREM de Grenoble « Arithmétique au collège ».