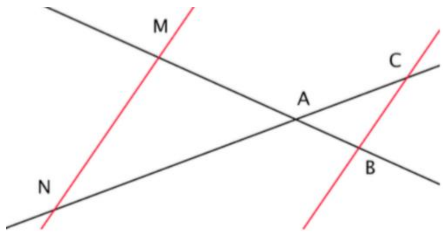
Théorème de Thalès (2) : contraposée et réciproque

On a utilisé précédemment le théorème de Thalès pour calculer des longueurs dans des configurations particulières.

Théorème de Thalès :

Si deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et les droites (BC) et (MN) sont parallèles
alors le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

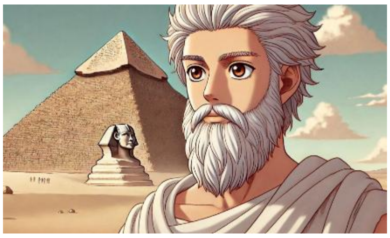
Longueur des côtés du triangle ABC	AB	AC	BC
Longueur des côtés du triangle AMN	AM	AN	MN



Ou on peut également écrire l'égalité des rapports de longueurs :

$$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AM}} = \frac{\mathrm{AC}}{AN} = \frac{\mathrm{BC}}{MN}$$

Exemple :
On considère deux droites (AB) et (CD) sécantes en O telles que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.
Données numériques : AO = 5cm ; CO = 7cm ; DO = 10,5cm.
Calculer BO.



Droites parallèles ?

On ne s'intéresse plus aux calculs de longueurs dans la partie qui va suivre, on veut savoir si connaissant des longueurs, certaines droites sont parallèles ou non.

Réciproque du théorème de Thalès pour prouver que des droites sont parallèles

Réciproque du théorème de Thalès : On considère deux droites (BM) et (CN) sécantes en A.

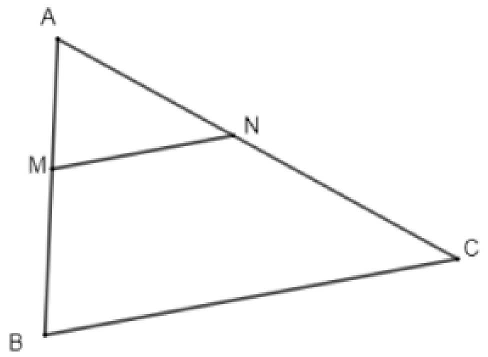
Si les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre et si $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$

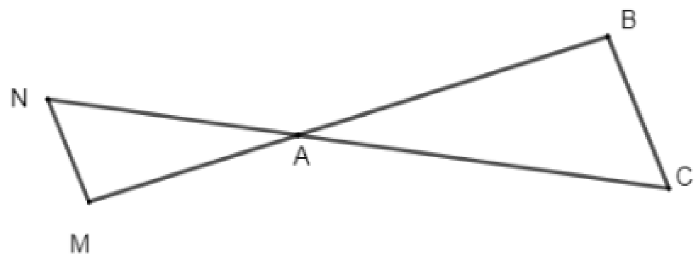
Alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

Remarque :

La réciproque du théorème de Thalès sert à démontrer que deux droites sont parallèles.

Exemple 1 :



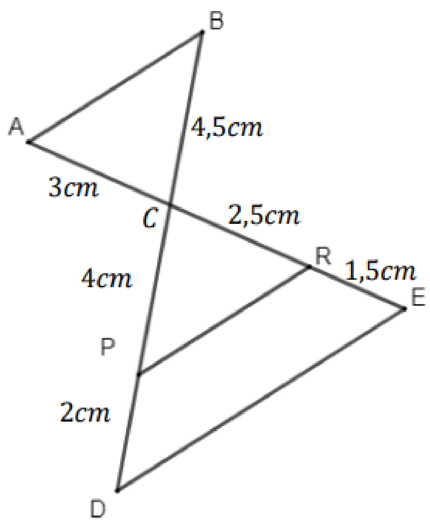


Dans chaque cas, les points A, M, B et A, N, C sont alignés dans le même ordre.

Si, en plus de cela, on a $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AC}}$ (ou $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AM}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AN}}$)

alors les droite (MN) et (BC) sont parallèles.

Exemple 2 :



1) Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

2) Les droites (PR) et (DE) sont-elles parallèles ?

1) On sait que :

- Les droites (AE) et (BD) sont sécantes en C.
- Les points A, C, E et B, C, D sont alignés dans le même ordre.

- D'une part, $\frac{CA}{CE} = \frac{3}{2{,}5+1{,}5} = \frac{3}{4}$ = 0,75

  D'autre part, $\frac{CB}{CD} = \frac{4{,}5}{4+2} = \frac{4{,}5}{6}$ = 0,75

  Alors $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

2) On sait que :

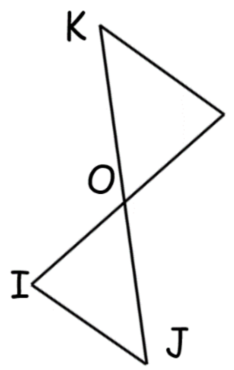
- Les droites (DP) et (ER) sont sécantes en C.
- Les points D, P, C et E, R, C sont alignés dans le même ordre.
- D'une part, $\frac{CD}{CP} = \frac{4+2}{4} = \frac{6}{4}$ = 1,5

  D'autre part, $\frac{CE}{CR} = \frac{2,5+1,5}{2,5} = \frac{4}{2,5}$ = 1,6

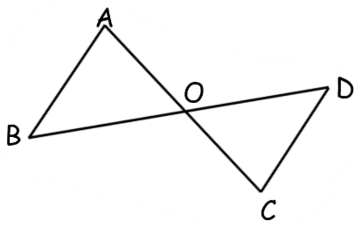
  Alors $\frac{CD}{CP} \neq \frac{CE}{CR}$.

Donc les droites (DE) et (PR) ne peuvent pas être parallèles.
(Car si elles l'étaient, l'égalité du théorème de Thalès serait vérifiée)

ATTENTION : il ne s'agit pas là de l'application de la réciproque du théorème de Thalès mais de la contraposée du théorème de Thalès (pour l'explication de la contraposée, se reporter au cours sur le théorème de Pythagore)



Application 1 : Les droites (IL) et (KJ) sont sécantes en O. IO = 3 cm, OL = 12cm,
OJ = 2,7 cm et OK = 9cm.
Les droites (IJ) et (KL) sont-elles parallèles ?



Application 2 : Les droites (AC) et (BD) sont sécante en O. OA= 5cm, OC = 10cm, OB = 8cm, OD = 16 cm. (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

Classe Genially :